

**UNIVERSIDAD MAYOR REAL Y PONTIFICIA DE
SAN FRANCISCO XAVIER DE CHUQUISACA**

VICERRECTORADO

**CENTRO DE ESTUDIOS DE POSGRADO
E INVESTIGACION**



**ANÁLISIS DINÁMICO COMPARATIVO DE UNA
FUNDACIÓN PARA TURBINA A GAS MEDIANTE
MÉTODOS ANALÍTICOS Y ELEMENTOS FINITOS CON
FUNCIONES DE IMPEDANCIA EN SUELO COHESIVO**

**TRABAJO EN OPCIÓN AL GRADO DE MAGISTER EN
INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

AUTOR: ING. JAIME WILLIAM CONDORI LAURA

LA PAZ, JUNIO DE 2025

CESIÓN DE DERECHOS

Al presentar este trabajo como requisito previo para la obtención del título de MAGISTER EN INGENIERIA ESTRUCTURAL, VERSION VII, de la Universidad Mayor, Real y Pontificia de San Francisco Xavier de Chuquisaca, autorizo al Centro de Estudios de Posgrado e Investigación, Unidad de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Civil o a la Biblioteca de la Universidad, para que se haga de este trabajo un documento disponible para su lectura, según normas de la Universidad.

También cedo a la Universidad Mayor, Real y Pontificia de San Francisco Xavier de Chuquisaca, los derechos de publicación de este trabajo o parte de él, manteniendo mis derechos de autor hasta un periodo de 30 meses posterior a su aprobación.

JAIME WILLIAM CONDORI LAURA

LA PAZ, JUNIO DE 2025

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a todas aquellas personas que se identifican con el desarrollo de la misma y a quienes desean alcanzar la mejora continua y en especial a:

A Dios, cuya fuente de sabiduría, me ha orientado por el buen camino, sabiendo siempre que él está presente en todo.

A mis padres, cuya paciencia, ejemplo y consejos, de manera incondicional me han servido de impulso a lo largo de mi vida.

A mis hermanas, por su apoyo, preocupación y confianza depositada en poder lograr las metas académicas trazadas.

A mis sobrinos, que, por su inocencia, afecto y alegría que muestran ante la vida, reflejan los ánimos que uno debe poseer para poder alcanzar cualquier objetivo y por ello instarlos a continuar con sus estudios.

AGRADECIMIENTOS

Las palabras y el espacio se quedan cortos para enumerarlos uno a uno, pero en particular y especialmente agradezco a:

A mi familia, por el apoyo, paciencia y enseñanzas que me han servido de motivación para culminar este trabajo.

A mis compañeros, colegas y amigos, que rescatando las virtudes que poseen, son inspiración para seguir mejorando en el día a día.

Al Centro de Estudios de Posgrado e Investigación de la Universidad Mayor Real y Pontificia de San Francisco Xavier de Chuquisaca, por el honor y orgullo de haber sido participe en los estudios de posgrado que ofrece la Universidad.

ÍNDICE GENERAL

CESIÓN DE DERECHOS	ii
DEDICATORIA	iii
AGRADECIMIENTOS	iv
ÍNDICE GENERAL	v
LISTA DE TABLAS	x
LISTA DE FIGURAS	xii
RESUMEN	xiv
ABSTRACT	xv
1. CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN	1
1.1 GENERALIDADES	1
1.2 SITUACIÓN PROBLEMÁTICA	1
1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	3
1.4 JUSTIFICACIÓN	3
1.5 LIMITACIONES DEL ESTUDIO	3
1.6 HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN	4
1.7 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	4
1.7.1 Objetivo general	4
1.7.2 Objetivos específicos	4
1.8 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	5
1.9 MUESTRA Y DEFINICIÓN DE VARIABLES	5

1.10	ORGANIZACIÓN DE LA TESIS	6
2.	CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO (ESTADO DEL ARTE)	8
2.1	ANTECEDENTES Y ESTADO DEL ARTE	8
2.2	CONTEXTO Y ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN	15
2.3	MARCO CONCEPTUAL DE LA TEORÍA DE VIBRACIONES	16
2.3.1	Sistemas con 3 grados de libertad - Vibración Libre y Forzada	18
2.3.1.1	Bloque rígido soportado por tres tipos de resortes (vibración libre)	18
2.3.1.2	Bloque rígido soportado por tres tipos de resortes (vibración forzada)	21
2.3.2	Amplitudes en Resonancia	23
2.4	MÉTODOS DE ANÁLISIS DINÁMICO EN FUNDACIONES VIBRANTES	25
2.4.1	Análisis dinámico clásico y con formulación de Lagrange	25
2.4.2	Análisis dinámico por el método de la respuesta modal	27
2.4.3	Análisis dinámico por integración directa (principios de diferencia finita)	30
2.4.3.1	Método de la diferencia central (sistemas lineales con MGD)	30
2.4.3.2	Selección del paso de tiempo para el método de integración directa	31
2.4.4	Análisis dinámico por el método de elementos finitos (MEF)	32
2.4.4.1	Máquina y fuerzas dinámicas	33
2.4.4.2	Sistema de fundación	33
2.4.4.3	Suelo de apoyo (condiciones de borde)	34
2.5	PARÁMETROS DE DISEÑO DE LA MÁQUINA	34
2.5.1	Parámetros para máquinas rotativas	35
2.5.2	Excentricidad del rotor	35

2.5.3	Fuerzas dinámicas de desequilibrio	35
2.6	PARÁMETROS DE DISEÑO DE LA FUNDACIÓN	36
2.6.1	Propiedades del material de la fundación	36
2.6.1.1	Resistencia y otras propiedades del hormigón	37
2.6.1.2	Modulo elástico del hormigón	37
2.6.1.3	Resistencia del acero de refuerzo	37
2.6.2	Excentricidad de la fundación	37
2.6.3	Límites de vibración para fundaciones de máquinas	38
2.7	PARÁMETROS DE DISEÑO DEL SUELO	39
2.7.1	Aspectos del suelo que influyen en la IDSE	39
2.7.2	Modelos simplificados para considerar la IDSE	40
3.	CAPÍTULO III MARCO METODOLÓGICO	42
3.1	DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN	42
3.2	UNIDAD DE ANÁLISIS	42
3.3	INSTRUMENTOS Y HERRAMIENTAS	42
3.4	PROCEDIMIENTO PARA LA INVESTIGACIÓN	43
3.4.1	Condiciones de carga	43
3.4.2	Modelos constitutivos	44
3.4.3	Procedimiento general de análisis y modelado	46
3.5	METODOLOGÍA DE ANÁLISIS PARA MÉTODOS ANALÍTICOS	48
3.5.1	Fundamento del sistema físico y esquema general de dimensionamiento	48
3.5.2	Dimensionado de la fundación mediante análisis dinámico	49
3.5.2.1	Profundidad requerida de la fundación	51

3.5.2.2 Verificación del margen disponible para otras cargas	52
3.5.2.3 Centroides y verificación de excentricidades	53
3.5.2.4 Momentos de inercia de masa	54
3.5.2.5 Modelos simplificados (resortes y amortiguamientos)	56
3.5.2.6 Frecuencias naturales y verificación de resonancia en el sistema	67
3.5.2.7 Amplitudes máximas de vibración	69
3.6 METODOLOGÍA DE MODELADO PARA EL MEF	72
3.6.1 Formulación del modelo dinámico computacional	72
3.6.2 Tipo de elementos empleados en el modelado	75
3.6.3 Modelado de cargas generales y fuerzas dinámicas	76
3.6.4 Modelado de las condiciones de borde	77
4. CAPÍTULO IV ANÁLISIS DINÁMICO DE UNA FUNDACIÓN DE BLOQUE COMBINADO PARA MÁQUINA DE TURBINA A GAS	78
4.1 DESCRIPCIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO	78
4.1.1 Descripción y parámetros de la máquina	78
4.1.2 Propiedades estructurales de la fundación	80
4.1.3 Parámetros dinámicos del suelo	82
4.2 ANÁLISIS DINÁMICO DEL SISTEMA DE FUNDACIÓN	82
4.2.1 Modelo matemático para el análisis por métodos analíticos	82
4.2.2 Modelación del sistema de fundación por el MEF	83
4.3 RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN	87
4.3.1 Frecuencias naturales de vibración en los modos respectivos	87
4.3.2 Amplitudes máximas en las esquinas superiores de la fundación	89

5. CAPÍTULO V COMPARACIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	91
5.1 ANÁLISIS COMPARATIVO	91
5.1.1 Comparación de las frecuencias naturales de vibración	91
5.1.2 Comparación de las amplitudes máximas de vibración	93
5.2 DISCUSIÓN DE RESULTADOS	96
6. CAPÍTULO VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	108
6.1 CONCLUSIONES	108
6.2 RECOMENDACIONES	110
BIBLIOGRAFÍA	112
ANEXO I ANÁLISIS DINÁMICO DE UNA FUNDACIÓN PARA MÁQUINA POR MÉTODOS ANALÍTICOS	119
ANEXO II CÁLCULOS PREVIOS AL ANÁLISIS DINÁMICO POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	165

LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1. Propiedades del hormigón estructural	37
Tabla 2.2. Amplitudes admisibles según el tipo de máquina	38
Tabla 3.1. Propiedades de tres capas de suelo homogéneo para el análisis dinámico	45
Tabla 3.2. Categorías de clases de suelo C y D según el Eurocódigo 8.....	46
Tabla 3.3. Expresiones de resortes del suelo por Richart y Lysmer (1970).....	58
Tabla 3.4. Expresiones de amortiguamiento del suelo por Richart y Lysmer (1970).....	58
Tabla 3.5. Factores de embebido para resortes del suelo	59
Tabla 3.6. Factores de embebido para amortiguamiento del suelo	59
Tabla 3.7. Radios equivalentes y frecuencias adimensionales.....	61
Tabla 3.8. Funciones de Impedancias traslacionales y rotacionales (Solución 1)	62
Tabla 3.9. Función de Impedancia rotacional de torsión (Solución 1)	63
Tabla 3.10. Factores de impedancias en función del coeficiente de Poisson ($D_i = 0$).....	63
Tabla 3.11. Funciones de Impedancias traslacionales y rotacionales (Solución 2)	64
Tabla 3.12. Función de Impedancia rotacional de torsión (Solución 2)	65
Tabla 3.13. Factores de impedancias en función del tipo de suelo ($D_i = 0$).....	65
Tabla 3.14. Frecuencias naturales angulares límite para los seis modos de vibración ...	67
Tabla 3.15. Frecuencias naturales para los modos desacoplados del sistema.....	67
Tabla 3.16. Frecuencias naturales para los modos acoplados del sistema	68

Tabla 3.17. Expresiones matriciales de rotación, traslación y de vectores punto	71
Tabla 4.1. Cargas estáticas, dinámicas y coordenadas de los pernos de anclaje.....	80
Tabla 4.2. Frecuencias naturales en Hz según método de análisis (CASO 1)	88
Tabla 4.3. Frecuencias naturales en Hz según método de análisis (CASO 2)	88
Tabla 4.4. Frecuencias naturales en Hz según método de análisis (CASO 3)	88
Tabla 4.5. Frecuencias naturales en Hz según método de análisis (CASO 4)	88
Tabla 4.6. Amplitudes máximas de vibración según caso y método de análisis.....	89
Tabla 5.1. Comparación de frecuencias naturales entre los MA y el MEF (CASO 1) ...	91
Tabla 5.2. Comparación de frecuencias naturales entre los MA y el MEF (CASO 2) ...	91
Tabla 5.3. Comparación de frecuencias naturales entre los MA y el MEF (CASO 3) ...	92
Tabla 5.4. Comparación de frecuencias naturales entre los MA y el MEF (CASO 4) ...	92
Tabla 5.5. Comparación de amplitudes máximas entre el MCL y el MEF	94
Tabla 5.6. Comparación de amplitudes máximas entre el MRM y el MEF	94
Tabla 5.7. Comparación de amplitudes máximas entre el MID y el MEF.....	94
Tabla 5.8. Resumen de la diferencia de frecuencias [%] entre los MA y el MEF	98
Tabla 5.9. Resumen diferencia de amplitud máxima [%] entre el MCL y el MEF	102
Tabla 5.10. Resumen diferencia de amplitud máxima [%] entre el MRM y el MEF ...	102
Tabla 5.11. Resumen diferencia de amplitud máxima [%] entre el MID y el MEF	102
Tabla 5.12. Resumen diferencia de amplitud máxima en z [%] entre MA y el MEF ...	104

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Grados de libertad y modos de vibrar de un sistema de fundación	17
Figura 2.2. Bloque rígido soportado por tres tipos de resortes (vibración libre)	19
Figura 2.3. Bloque rígido apoyado en un resorte traslacional y rotacional plano x-z	20
Figura 2.4. Fuerzas en un bloque rígido apoyado en tres resortes (vibración forzada) ..	22
Figura 2.5. Pasos del método de la diferencia central para sistemas con MGDG.....	31
Figura 3.1. Esquema de la máquina QDRA70 y algunos datos técnicos.....	44
Figura 3.2. Pasos para el análisis comparativo de una fundación de máquina	47
Figura 3.3. Pasos de dimensionamiento de una fundación para máquina.....	49
Figura 3.4. Modelo matemático de una fundación de bloque combinado genérico	49
Figura 3.5. Distribución de pesos que conforman el peso total de la máquina.....	52
Figura 3.6. Sistema de fundación con rigideces equivalentes del suelo	57
Figura 3.7. Amplitudes de traslación y rotación de un sistema de fundación.....	71
Figura 3.8. Puntos en los bordes superiores de un sistema de fundación	71
Figura 3.9. Ejes locales y propiedades de elementos sólidos en SAP2000	76
Figura 4.1. Componentes principales de la máquina de turbina a gas	79
Figura 4.2. Geometría en planta de la fundación y puntos de carga del equipo	79
Figura 4.3. Geometría en elevación de la fundación y Shaft del rotor del equipo.....	81
Figura 4.4. Representación física tridimensional del sistema de fundación	83

Figura 4.5. Representación del modelo en el programa SAP2000 v.22	84
Figura 4.6. Frecuencias y formas modales obtenidas del MEF (CASO 1)	85
Figura 4.7. Ubicación de cuatro puntos críticos para hallar amplitudes máximas.....	86
Figura 4.8. Amplitudes verticales obtenidas del MEF (CASO 1)	87
Figura 5.1. Frecuencias naturales en los 6 modos de vibración (CASO 1)	96
Figura 5.2. Frecuencias naturales en los 6 modos de vibración (CASO 2)	96
Figura 5.3. Frecuencias naturales en los 6 modos de vibración (CASO 3)	97
Figura 5.4. Frecuencias naturales en los 6 modos de vibración (CASO 4)	97
Figura 5.5. Diferencias de frecuencias de traslación vs. relación B/H	98
Figura 5.6. Diferencias de frecuencias de rotación vs. relación B/H.....	99
Figura 5.7. Amplitudes máximas vs. métodos de análisis (CASO 1)	100
Figura 5.8. Amplitudes máximas vs. métodos de análisis (CASO 2)	100
Figura 5.9. Amplitudes máximas vs. métodos de análisis (CASO 3)	101
Figura 5.10. Amplitudes máximas vs. métodos de análisis (CASO 4)	101
Figura 5.11. Diferencia de amplitudes máximas vs. relación B/H (MCL/MEF)	103
Figura 5.12. Diferencia de amplitudes máximas vs. relación B/H (MRM/MEF)	103
Figura 5.13. Diferencia de amplitudes máximas vs. relación B/H (MID/MEF)	103
Figura 5.14. Diferencia de amplitud máxima en z vs. relación B/H (MA/MEF)	104

RESUMEN

La industrialización de diversas fuentes de energía en Bolivia se ha centrado significativamente en la generación termoeléctrica. No obstante, los sistemas productivos complejos y sus fundaciones en el sector industrial requieren análisis dinámicos sofisticados para garantizar la seguridad y estabilidad, particularmente en lo que respecta a la interacción dinámica suelo-estructura (IDSE).

Debido a la escasa información y estudios nacionales sobre el diseño de fundaciones expuestas a cargas dinámicas, los diseñadores a menudo recurren a códigos extranjeros sin una comprensión profunda del problema físico. Por lo tanto, es necesario realizar un análisis dinámico comparativo entre métodos analíticos y el método de elementos finitos (MEF) para lograr un diseño óptimo de fundaciones vibrantes.

El objetivo de este estudio es realizar un análisis dinámico comparativo de una fundación para turbina a gas, utilizando métodos analíticos y el MEF con funciones de impedancia en suelo cohesivo. Se establece un criterio para definir el límite de espesor de fundación aplicable en ambos métodos. Se emplearon modelos de estudio para representar el sistema físico y se compararon los resultados obtenidos, considerando variaciones en el espesor de la fundación.

El método de elementos finitos (MEF) proporciona una evaluación más detallada de la interacción dinámica, especialmente en condiciones donde los métodos analíticos dejan de predecir con precisión. Sin embargo, los métodos analíticos aún ofrecen estimaciones razonables en configuraciones geométricas específicas.

Determinar el límite de espesor de la fundación donde ambos métodos son aplicables permitirá optimizar el diseño de fundaciones para equipos vibratorios, asegurando fiabilidad y orientando a los ingenieros en la elección del método más eficiente.

Palabras claves: industrialización, análisis dinámico, métodos analíticos, método de elementos finitos, interacción dinámica suelo-estructura, espesor de fundación, turbina a gas.

ABSTRACT

The industrialization of various energy sources in Bolivia has significantly focused on thermoelectric generation. However, complex production systems and their foundations in the industrial sector require sophisticated dynamic analyses to ensure safety and stability, particularly concerning soil-structure dynamic interaction (SSDI).

Due to the limited information and national studies on the design of foundations exposed to dynamic loads, designers often resort to foreign codes without a deep understanding of the physical problem. Therefore, it is necessary to conduct a comparative dynamic analysis between analytical methods and the finite element method (FEM) to achieve an optimal design of vibrating foundations.

The objective of this study is to perform a comparative dynamic analysis of a gas turbine foundation, using analytical methods and the FEM with impedance functions in cohesive soil. A criterion is established to define the foundation thickness limit applicable in both methods. Study models were used to represent the physical system and the results obtained were compared, considering variations in the foundation thickness.

The finite element method (FEM) provides a more detailed assessment of the dynamic interaction, especially in conditions where analytical methods fail to predict accurately. However, analytical methods still offer reasonable estimates in specific geometric configurations.

Determining the thickness limit of the foundation where both methods are applicable will allow for optimizing the design of foundations for vibrating equipment, ensuring reliability, and guiding engineers in the selection of the most efficient method.

Keywords: industrialization, dynamic analysis, analytical methods, finite element method, soil-structure dynamic interaction, foundation thickness, gas turbine.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 GENERALIDADES

El escenario energético que demanda cada país, da origen a la industrialización de diferentes fuentes de energía. Bolivia tiene mayor capacidad de generación eléctrica en termoeléctrica en base a gas natural con un 63%, seguido de las centrales hidroeléctricas con un 19%, hidroeléctrica de embalse 11%, termoeléctrica de diésel 6% y biomasa 1%. Los productos finales son gasolina para vehículos, propano y butano líquido, combustible para aviones, gasóleo, fueloil y lubricantes para uso en maquinarias e industria. Como producto auxiliar se genera electricidad con turbinas a gas natural en Santa Cruz, Cochabamba y Chuquisaca (WWF Bolivia, 2020).

En el sector industrial, se hace recurrente la implantación de máquinas y sistemas productivos complejos, los cuales necesitan soportes de estructuras de fundación adecuadas, mismas que se exponen a cargas dinámicas que pueden ser emitidas por dichas máquinas y que muchas veces no son consideradas en el diseño, debido a que se desconoce de un análisis sofisticado que tome en cuenta su naturaleza dinámica (Suarez, 2014).

Es así que surge la obligación de cumplir con las exigencias de calidad en los proyectos constructivos, donde los entes involucrados en el sector de la construcción civil se ven forzados a estudiar a profundidad la concepción, diseño y ejecución de estos proyectos a fin de obtener el buen desempeño de los mismos. La instalación de plantas de energía nuclear seguramente jugará un papel importante en un futuro cercano, donde la Interacción Dinámica Suelo-Estructura (IDSE) sea un tema crucial para garantizar la seguridad y adecuación a los estándares internacionales (Mejía Bermejo, 2017).

1.2 SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

El diseño dinámico de fundaciones para maquinaria rotativa pesada, como turbinas a gas, exige una comprensión precisa del comportamiento vibracional del sistema máquina-

fundación-suelo. En este contexto, se presentan desafíos significativos, como la representación adecuada de la Interacción Dinámica Suelo-Estructura (IDSE) y la elección del método de análisis dinámico más apropiado. A pesar de los avances en métodos computacionales como el método de elementos finitos (MEF), su aplicación depende del establecimiento riguroso de modelos matemáticos que representen adecuadamente las condiciones físicas del problema. En países donde no existen normativas específicas, los ingenieros se ven obligados a aplicar criterios internacionales, que no siempre se validan con las condiciones locales (Alva Hurtado, 2020; Saran, 2021).

Aunque se dispone de herramientas analíticas y numéricas, no existe consenso sobre sus alcances y limitaciones. Los métodos analíticos ofrecen soluciones rápidas y comprensibles, pero dependen de simplificaciones geométricas que pueden no reflejar adecuadamente la realidad estructural. En contraste, los modelos numéricos mediante MEF permiten mayor flexibilidad, pero requieren interpretación profunda de los resultados, ya que se enfrentan a estructuras de cálculo cerradas que exigen validación adecuada (Abou Elsaoud, 2021).

La contradicción entre la precisión numérica y la comprensión física analítica no se ha resuelto satisfactoriamente. A menudo, los estudios carecen de comparaciones detalladas sobre los puntos de inflexión geométricos y los límites de rigidez donde los métodos analíticos dejan de predecir correctamente el comportamiento vibracional. Esto dificulta la elección del método adecuado en función de la complejidad geométrica y las condiciones dinámicas reales.

El estudio comparará los métodos analíticos y numéricos para identificar rangos de validez y divergencias en el comportamiento de sistemas de fundación para máquinas centrífugas (turbinas a gas). La investigación abordará estas cuestiones en el contexto nacional, específicamente sobre suelos cohesivos, donde se desarrollan proyectos termoeléctricos, y proporcionará recomendaciones para un diseño más eficiente, confiable y adaptado a las condiciones locales.

1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Cómo afectan las funciones de impedancia en el análisis dinámico de fundaciones para turbinas a gas sobre suelos cohesivos, de modo que los métodos analíticos y el método de elementos finitos generen resultados comparables dentro de un rango determinado de espesor del cimientto, y cuáles son las diferencias significativas que surgen al superar un criterio límite de rigidez relativa?

1.4 JUSTIFICACIÓN

El análisis dinámico de fundaciones para turbinas a gas resulta fundamental para asegurar que operen dentro de límites aceptables de vibración, minimizando riesgos de fallas. En Bolivia, la ausencia de normativas específicas obliga a recurrir a estándares internacionales, lo que genera incertidumbre sobre su adecuación a condiciones locales.

Esta investigación compara métodos analíticos y numéricos para evaluar la respuesta dinámica en fundaciones de máquinas centrífugas, incorporando funciones de impedancia para analizar con precisión la interacción dinámica suelo-estructura (IDSE) y el efecto que tiene el espesor del cimientto. Asimismo, busca determinar el rango de validez de ambos enfoques e identificar los puntos en que sus resultados divergen.

Finalmente, al emplear parámetros de diseño representativos de condiciones reales, los hallazgos tendrán aplicación directa en proyectos industriales y aportarán insumos técnicos para la práctica profesional y el desarrollo normativo en infraestructuras energéticas.

1.5 LIMITACIONES DEL ESTUDIO

El estudio se enfoca en el análisis de la respuesta dinámica en fundaciones para turbinas a gas, utilizando métodos analíticos y numéricos ajustados a las condiciones locales. Aunque las condiciones geotécnicas específicas del sitio son fundamentales para los resultados obtenidos, los enfoques empleados pueden ser aplicables a otros suelos con características definidas, como los suelos granulares. Aunque se asume cierta

homogeneidad y linealidad en los modelos, estas aproximaciones son útiles para representar el comportamiento general en la mayoría de los escenarios, aunque podrían mejorarse con mayor complejidad en estudios futuros. La falta de pruebas experimentales directas limita la validación empírica en el contexto exacto del estudio; sin embargo, los resultados obtenidos ofrecen una base sólida para futuras investigaciones y aplicaciones en proyectos industriales. Este estudio contribuye a la optimización del diseño de fundaciones vibrantes y al desarrollo de normativas adaptadas a las condiciones locales.

1.6 HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Al aplicar funciones de impedancia en el análisis dinámico de fundaciones para turbinas a gas sobre suelos cohesivos, los métodos analíticos y el método de elementos finitos arrojan resultados comparables mientras el espesor del cimientto se mantenga dentro de un rango determinado; sin embargo, surgen diferencias significativas cuando se supera un criterio límite de rigidez relativa.

1.7 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.7.1 Objetivo general

Realizar el análisis dinámico comparativo de una fundación para turbina a gas, mediante métodos analíticos y elementos finitos con funciones de impedancia en suelo cohesivo.

1.7.2 Objetivos específicos

- Revisar las metodologías y literatura existente para el análisis dinámico de fundaciones para equipos vibratorios centrífugos basados en métodos analíticos.
- Definir los modelos de estudio, los parámetros de diseño y los métodos de análisis que se utilizarán para la evaluación dinámica de las fundaciones.
- Efectuar el análisis dinámico de la fundación para turbina a gas, utilizando los modelos definidos y especificaciones del equipo dinámico.

- Evaluar y comparar los resultados obtenidos entre los métodos analíticos y numéricos, variando el espesor de la fundación, y establecer un criterio límite de rigidez relativa aplicable en ambos enfoques.

1.8 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Para cumplir con los objetivos de la presente investigación, se consideraron las siguientes etapas que se describen a continuación:

- Revisión de la literatura, en la cual se ha realizado una búsqueda sistemática de información de fuentes primarias utilizando buscadores de internet, bibliografías con referencia al tema en formatos físicos y en digital (libros, tesis, proyectos fin de grado, artículos, revistas científicas, manuales, monografías, normativas estadounidenses, etc.), a objeto de poder evaluar las investigaciones previas sobre el tema.
- Análisis del estado del arte, a fin de poder definir las metodologías y los pasos de análisis, identificando los parámetros de diseño necesarios para poder caracterizar al sistema máquina-fundación-suelo.
- Recolección de datos para un estudio de caso, la cual tiene por objeto definir los datos iniciales de entrada, como ser los parámetros técnicos de la máquina vibratoria, geometría y material de la fundación, así como los parámetros dinámicos del suelo.
- Aplicar los métodos de análisis al caso de estudio, obteniendo las variables de análisis y su posterior comparación de resultados.
- Discusión de resultados, a objeto de contrastar con la literatura previa mostrando su validez, con la aceptación o rechazo de la hipótesis planteada.

1.9 MUESTRA Y DEFINICIÓN DE VARIABLES

El presente trabajo se centra en mostrar y emplear las metodologías de análisis dinámico apoyadas en las formulaciones teórico analíticas programables desde el punto de vista práctico, así como el método de elementos finitos, para luego comparar estos métodos estudiando la respuesta dinámica con cambios en el espesor de una fundación apoyada en suelo cohesivo y poco profunda para una máquina centrífuga (turbina a gas).

Las variables consideradas son:

- **Variables Independientes:** Altura o espesor de la fundación. Se explorarán diferentes espesores para evaluar su influencia en las respuestas dinámicas y la aplicabilidad de los métodos de análisis.
- **Variables Dependientes:**
 - Condiciones de borde.
 - Frecuencias límite y frecuencias naturales de vibración.
 - Amplitudes de vibración.
- **Variables Controladas:**
 - Geometría en planta de la fundación.
 - Propiedades del material de la fundación y del suelo de apoyo.
 - Frecuencia de operación de la máquina.
 - Cargas estáticas y dinámicas.

1.10 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

El presente trabajo de tesis está organizado en 6 capítulos siguiendo una secuencia lógica e incluyendo los apartados correspondientes a la bibliográfica empleada y anexos.

En el primer capítulo, se inicia con las generalidades, situación problemática, se contextualiza y se formula el problema de investigación, planteando la justificación, los límites de estudio, la hipótesis, los objetivos y la metodología de la investigación, también se establecen la muestra y la definición de variables, culminando con la organización del presente trabajo de tesis.

El segundo capítulo se centra en la revisión de la literatura relevante para la teoría de vibraciones en fundaciones de máquinas, explorando el estado del arte de los métodos analíticos y el de elementos finitos (MEF), mostrando en la última parte los parámetros de diseño tanto de la Máquina, Fundación y Suelo requeridos en un análisis dinámico.

En el tercer capítulo se describe el marco metodológico de cómo se llevarán a cabo las simulaciones numéricas variando el espesor de la fundación y se detalla la metodología de análisis para los métodos analíticos, así como del modelado por el MEF.

En el cuarto capítulo, se muestran las características geométricas con las propiedades del material utilizado para el sistema de fundación de bloque combinado para una máquina centrífuga (turbina a gas), así como los datos pertinentes de la máquina y del suelo de apoyo, empleados en el análisis dinámico. Con lo anterior se procede al análisis con tres principales métodos analíticos (análisis dinámico clásico y con formulación de Lagrange, método de la respuesta modal y el de la integración directa), para luego efectuar el modelado por el MEF, incluyendo a la Interacción Dinámica Suelo-Estructura (IDSE) como funciones de impedancia dinámica. Se presentan los resultados del análisis dinámico según los métodos empleados y para cuatro casos de estudio obtenidos por la variación del espesor de la fundación.

En el quinto capítulo se presenta el análisis comparativo con la discusión de los resultados obtenidos por los métodos de análisis, destacando las implicaciones prácticas de las respuestas en términos de frecuencias naturales y amplitudes de vibración, para los cuatro casos de estudio.

El capítulo seis muestra las conclusiones de los hallazgos importantes de la investigación, proporcionando recomendaciones de diseño para máquinas centrífugas y sugerencias para futuras investigaciones en el área específica de la ingeniería estructural.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO (ESTADO DEL ARTE)

2.1 ANTECEDENTES Y ESTADO DEL ARTE

Bhatia (2008a) realizó la investigación titulada *Foundations for industrial machines and earthquake effects*. Dicha investigación tuvo como objetivo analizar las metodologías para diseñar cimentaciones de máquinas, abordando las características dinámicas de los elementos del sistema de cimentación y su impacto en la respuesta de la máquina. Este artículo menciona los parámetros de cimentación que influyen en las vibraciones de un sistema máquina-cimentación y los métodos de cálculo manual para las cimentaciones de tipo bloque, recomendando paquetes comerciales para el método de elementos finitos donde la modelación del suelo se efectuó mediante la representación por un conjunto de resortes equivalentes obtenidos mediante el uso de un coeficiente de compresión uniforme o mediante un continuo, con el dominio del suelo confinado a un dominio finito. Para investigar cómo se compara cada método de representación del suelo con otros, se realiza un análisis de vibración libre de una base de bloque utilizando cada método de representación del suelo que tenga propiedades del suelo iguales o compatibles. Los resultados de la modelación muestran una discrepancia significativa para las dos representaciones del suelo, por lo que el autor no recomienda el uso de modelos de suelo como un continuo para cimentaciones de tipo bloque, dado que la flexibilidad del suelo es un parámetro de control que gobierna la respuesta de la cimentación. Por otra parte, en opinión del autor, considerar la amortiguación geométrica o de radiación dependiente de la deformación y de la frecuencia en las prácticas de oficina de diseño no sólo es difícil sino también presentan ciertos inconvenientes. Las herramientas matemáticas comúnmente disponibles en la industria, en general, no están diseñadas para dar cabida a este tipo de amortiguación. Además, no se recomienda el uso de herramientas analíticas de alta gama para fines de diseño en vista de los ajustados cronogramas de un proyecto. En conclusión, los problemas de modelación matemática influyen considerablemente en la respuesta de un sistema de fundación para máquina.

Jafarzadeh y Asadinik (2008), en su estudio denominado *Dynamic response and impedance functions of foundation resting on sandy soil using physical model tests*, señalan que uno de los pasos clave en los métodos actuales para el análisis dinámico de sistemas suelo-cimentación bajo cargas sísmicas o armónicas, es estimar las funciones de impedancia dinámica (coeficientes de resorte y amortiguación). Sin embargo, en la simulación de problemas dinámicos a escala, es bien sabido que una de las principales dificultades es el efecto de borde causado por las reflexiones de ondas deseables desde el borde finito del modelo de suelo. Sin un tratamiento adecuado, este último puede contaminar la respuesta hasta el punto de que puede perder su significado. Siendo el objetivo, calcular las funciones de impedancia para tres formas de bloques de modelos físicos (circular, cuadrada y rectangular, con radio de 7.5 cm de un círculo equivalente con relación de aspecto para la base rectangular de $L/B=2$.) en un contenedor cúbico de acero de tamaño 1.0 m×1.0 m×0.8 m. Para apreciar mejor las características de no reflexión de ondas de un medio semi-infinito, se colocó una capa de plastfoam con 5 centímetros de espesor en las paredes laterales. Se empleó un generador de fuerza vertical para la excitación armónica accionado por un amplificador de potencia. Las contribuciones encontradas en este artículo son: La rigidez y la amortiguación del suelo de soporte son funciones de la frecuencia de vibración, que se deben principalmente a las condiciones de contorno. También la amortiguación aumentó significativamente con el empotramiento de los modelos, lo que afectó al comportamiento del sistema. Por último, una zapata circular equivalente proporciona una estimación razonablemente buena en la respuesta para una base rectangular con L/B menor o igual a 2.

Jafarzadeh y Ghasemzade Mashhadi (2009), en su estudio titulado *Dynamic impedance functions of machine foundations on sandy soils by physical model tests*, llevaron a cabo las pruebas del modelo físico en un contenedor de acero con dimensiones de 1.0 m×1.0 m×0.9 m. Para eliminar la reflexión de las ondas elásticas, se utilizó una capa de aserrín en las paredes laterales y en el fondo del contenedor. Asimismo, con el fin de obtener un medio homogéneo y una densidad uniforme, se utilizó el método de pluviación de arena con aire. La respuesta de los modelos a las excitaciones armónicas se midió utilizando

varios instrumentos desplegados alrededor de la cimentación. Los resultados de las pruebas muestran una cantidad de no linealidad en el comportamiento dinámico del suelo. Esta no linealidad puede relacionarse con el efecto del nivel de carga sobre la rigidez dinámica del sistema, mientras que la amortiguación es independiente de la intensidad de la carga. En el tema del empotramiento de la zapata, los resultados de la prueba muestran una disminución de la rigidez dinámica al aumentar la profundidad de empotramiento. En conclusión, el comportamiento dinámico del suelo complica el diseño de cimientos más aun con la escasez de estudios experimentales y por ello las funciones de impedancia teóricas para varias condiciones, como empotramiento de la cimentación, suelo infinito o estratificado, medios homogéneos o no homogéneos, siguen siendo válidas ya que los mismos se han calculado mediante enfoques analíticos, semi-analíticos y numéricos (Gazetas, 1983; Gazetas, 1991; Novak, 1987).

Porto et al. (2012) realizaron la investigación *Influence of soil structure interaction on the foundation of equipment subject to dynamic forces*, en la que afirman que el procedimiento de diseño en base a “reglas empíricas” ya no se justifica debido a los avances en las áreas de Dinámica Estructural y Dinámica de Suelos que permiten predecir con relativa exactitud el comportamiento de una cimentación de máquina sometida a excitaciones dinámicas. El objetivo de esta investigación fue de evaluar la influencia de la rigidez del suelo (módulo de reacción vertical K obtenidas por correlaciones del ensayo SPT) en los desplazamientos de la cimentación de un molino de bolas sujeto a carga dinámica. Se estableció un caso de estudio para el análisis número de la cimentación de hormigón de un molino de bolas real, variando el coeficiente de rigidez del suelo para tres tipos diferentes de suelos, con el fin de evaluar la velocidad, desplazamiento y frecuencia natural de la estructura mediante elementos finitos empleando el software SAP2000. La flexibilidad del suelo (módulo de rigidez) fue agregada a la base del molino de bolas utilizando el modelo de Winkler, con resortes espaciados uniformemente de acuerdo con la malla considerada. De los resultados encontrados se concluye que la rigidez del suelo tiene influencia significativa en los resultados de desplazamiento, velocidad y frecuencia natural de la estructura en estudio, ya que una estimación incorrecta del módulo de

reacción vertical K puede causar serios problemas en la estructura. Las diferencias entre los modelos pueden ser considerables, a veces con una potencia de diez. El documento hace hincapié en la importancia de un análisis riguroso de los parámetros del suelo.

Abbas et al. (2017), en su estudio de investigación *Analysis of gas turbine foundation under harmonic loading with and without consideration of soil-structure interaction effect*, analizaron la vibración libre más la respuesta dinámica de una cimentación de turbina y generador bajo excitación armónica vertical, considerando un suelo estratificado de cinco capas mediante un modelo elástico lineal que considera e ignora el efecto de la interacción suelo-estructura (modelo de suelo con resortes de Richard y Whitman 1967 sin amortiguación) utilizando el modelado de elementos finitos 3D y con la ayuda del programa Abaqus (v 6.13). En comparación con los resultados en el caso de ignorar el efecto de la interacción suelo-estructura (SSI), se observaron valores altos de la respuesta de la cimentación al tomar el efecto del SSI debido a la representación de las capas de suelo (es decir, el efecto de la condición del sitio). Además, la respuesta de la cimentación y el número de amplitudes por ciclo se reducen en caso de no tener efecto de la SSI debido a la acumulación de la rigidez de la masa total del suelo en los nodos como resortes, lo que a su vez genera más rigidez. En conclusión, la consideración adecuada de la interacción entre el suelo y la estructura es crucial para el análisis de estructuras sensibles.

Ali y Mahamid (2018), en su estudio *Effect of soil-foundation interaction on the dynamic response of a four-cylinder compressor foundation*, analizaron un bloque de cimentación que soporta un compresor de cuatro cilindros, botellas de succión y descarga, un cigüeñal y un motor de accionamiento. En el modelado del sistema suelo-cimentación se utilizaron elementos de resorte, considerados adecuados por su precisión y relativa facilidad de representación mediante rigideces globales laterales y verticales del suelo, calculadas según Arya et al. (1984), incluyendo además el efecto de empotramiento de la cimentación. A partir del análisis dinámico del modelo 3D de elementos finitos, realizado en ANSYS (v13), se obtuvieron valores propios del bloque de cimentación en términos de frecuencias naturales, así como la respuesta forzada de la cimentación ante una carga desequilibrada proveniente del cigüeñal, aplicada con el fin de determinar la amplitud de

la respuesta forzada del sistema suelo-cimentación. Los resultados del análisis modal mostraron que los modos 1 a 6 se encontraban dentro del rango operativo del compresor, presentando una contribución de masa significativa. En cuanto a las respuestas en amplitud lateral y vertical, los autores concluyeron que, debido a la geometría esbelta de los pedestales, se produjo resonancia con la frecuencia de operación de la máquina, lo que hizo necesario modificar el espesor de estos elementos para evitar condiciones de resonancia. En conclusión, la representación física cercana a la realidad, entre otros factores, influye significativamente en la respuesta de este tipo de cimentaciones.

Tandon et al. (2019), en su investigación *Effect of embedment on dynamic response of block foundation under coupled vibration*, evaluaron la respuesta dinámica de una cimentación de bloque empotrada con relación de aspecto $L/B = 1.5$ en modo de vibración acoplado para diferentes profundidades de empotramiento ($D = 0.00, 0.25$ y 0.50 m). Se realizan una serie de pruebas de vibración de bloques utilizando un oscilador mecánico tipo Lazan bajo cuatro momentos excéntricos diferentes ($W \cdot e = 0.2, 0.8, 1.4$ y 2.0 N·m) para una carga estática de 6.6 kN. El bloque de hormigón con resistencia H30 de dimensiones $0.9 \text{ m} \times 0.6 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$, se apoyó en un suelo con un numero de golpes obtenidos del ensayo SPT de campo promedio de 9 hasta la profundidad de 3 metros, con velocidad de onda de corte de 216.42 m/s (obtenido por correlación de Hanumantharao et al. 2008). Las respuestas en términos de frecuencias, amplitudes para el movimiento de traslación y rotación para diferentes condiciones de empotramiento, se obtienen utilizando la teoría del semiespacio elástico (metodologías de Veletsos y Verbič). Los resultados teóricos se comparan con la respuesta obtenida a partir de las investigaciones experimentales. La comparación mostró una concordancia alentadora entre los resultados de la prueba experimental y los obtenidos a partir del análisis. La respuesta en amplitud y frecuencia del bloque de cimentación empotrada, indica que a medida que aumenta la profundidad de empotramiento, la amplitud resonante disminuye y la frecuencia resonante aumenta.

Giorgetti et al. (2021), en su estudio titulado *Machinery foundations dynamical analysis: A case study on reciprocating compressor foundation*, señalan que los diseñadores pueden abordar el problema basándose tanto en la teoría analítica como en el análisis de elementos

finitos (Software SAP2000), con representación del suelo a partir de la teoría semiespacio elástico (formulaciones analíticas de Dobry y Gazetas 1988 sin amortiguación). El artículo compara estos métodos estudiando la respuesta dinámica en términos de frecuencias naturales de diferentes geometrías de cimentación en un estudio de caso para un compresor reciprocante que genera una carga armónica vertical. La comparación muestra resultados similares hasta que la geometría de la cimentación se vuelve rígida. También muestra que el enfoque analítico permite una rápida y mejor alineación de las diversas restricciones durante la fase de diseño inicial. Después, para las fases de diseño detalladas, la geometría se puede verificar dinámicamente mediante un análisis de elementos finitos más completo. En conclusión, un enfoque analítico garantiza resultados aceptables si la hipótesis del cuerpo rígido es aplicable, pero difiere progresivamente de un análisis de elementos finitos cuando el bloque de cimentación se vuelve menos rígido.

Dhut et al. (2021), en su investigación titulada *Parametric study of machine foundation supporting reciprocating machine using elastic half space model by FEM and classical method*, mencionan que el método del semiespacio elástico (recomendado por ACI 351.3R-04 "Cimentación para equipos dinámicos") propuesto por Richart y Whitman otorga la importancia necesaria al efecto del amortiguamiento y la profundidad de empotramiento del suelo. En el estudio se tienen en cuenta tres máquinas diferentes de 150 rpm, 250 rpm y 450 rpm y se consideran seis tipos de suelo diferentes: arcilla media, arcilla rígida, arcilla dura, arena suelta, arena media y arena densa. Los tamaños de los cimientos de geometría cuadrada en planta, se optimizan según los casos de suelo (con parámetros de rigidez obtenidas por correlaciones) y cada caso se analiza utilizando el método clásico (soluciones analíticas para un cuerpo rígido) y el método de elementos finitos (Software de apoyo STAAD Pro V8i) para 0.8, 1.0 y 1.2 veces los parámetros del suelo para cubrir el rango de confianza. Los resultados concluyen que la frecuencia del modo de traslación vertical, calculada manualmente o por el FEM, es casi insignificante, mientras que la variación en los modos de rotación es de alrededor del 10 % al 20 %. Con el aumento de la rigidez del suelo, la frecuencia natural del sistema de cimentación de la máquina aumenta y la amplitud de la cimentación disminuye, en consecuencia, el volumen

de la base se reduce. El método clásico es más conservador en comparación con el FEM, ya que las amplitudes obtenidas utilizando el método clásico son mayores que las calculadas utilizando el FEM.

Desai et al. (2022), en su estudio titulado *Dynamic analysis of block-type machine foundation using Barkan's model for various soil parameters*, señalan que el método propuesto por Barkan (recomendado por IS: 2974-1982) para el diseño de cimientos de máquinas bajo carga armónica sigue siendo el método más popular. El estudio tiene como objetivo realizar el estudio paramétrico del análisis dinámico de cimentaciones tipo bloque utilizando el método de Barkan (resortes equivalentes sin el efecto de la amortiguación ni empotramiento del suelo y en términos de correlaciones entre los coeficientes del módulo de reacción de la subrasante). Para ello se consideran tres máquinas reciprocantes diferentes de 150 rpm, 250 rpm y 450 rpm y seis tipos de suelo: arcilla media, arcilla rígida, arcilla dura, arena suelta, arena media y arena densa. El tamaño de los cimientos con geometría en planta cuadrada se optimiza según los casos de suelo, y cada caso se analiza utilizando el método convencional de cuerpo rígido y el método de elementos finitos (FEM) empleando el software STAAD Pro V8i para 0.8, 1.0 y 1.2 veces los parámetros del suelo para cubrir el rango de confianza. Los resultados llevan a las siguientes conclusiones: hay una disminución significativa de la frecuencia natural y un aumento de la amplitud, con el aumento de la altura de la cimentación. La frecuencia del modo de traslación, calculada tanto manualmente como por el FEM, es casi insignificante, mientras que la variación de frecuencia en los modos de rotación es de alrededor del 10 % al 30 %. Las amplitudes obtenidas usando métodos convencionales son más altas que las calculadas usando el FEM. Esto infiere que modelar la base de la máquina usando el FEM es menos conservador. Los resultados muestran a grandes rasgos que a medida que la arcilla cambia de media a dura y la arena de suelta a densa, el tamaño de cimentación requerido disminuye.

Si bien los trabajos citados contribuyen significativamente al entendimiento de las fundaciones sometidas a vibraciones, la mayoría se centran en casos simplificados o carecen de una evaluación comparativa entre métodos analíticos y numéricos, lo que

limita su aplicabilidad práctica. Además, muchos de estos estudios no consideran la inclusión de las funciones de impedancia dinámica ni la incorporación del amortiguamiento en la representación del suelo, factores cruciales para una descripción precisa del comportamiento dinámico en condiciones reales. Esta observación justifica la necesidad de un enfoque combinado como el que se propone en el presente estudio. La comparación entre métodos analíticos convencionales y el método de elementos finitos (MEF) en el análisis de cimentaciones tipo bloque ha permitido no solo obtener resultados más precisos, sino también ofrecer un modelo más realista de los comportamientos dinámicos de las fundaciones. Este enfoque combinado, al incorporar tanto las teorías analíticas cerradas como las herramientas numéricas avanzadas, establece una base sólida para el diseño y optimización de cimentaciones sometidas a cargas dinámicas.

2.2 CONTEXTO Y ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN

El análisis dinámico de fundaciones sometidas a cargas vibratorias inducidas por maquinaria rotativa exige una comprensión precisa del sistema suelo-estructura y de la respuesta dinámica involucrada. Dentro de este marco, el presente trabajo se desarrolla en dos direcciones complementarias: el uso de métodos analíticos y la simulación numérica mediante el Método de Elementos Finitos (MEF). Esta dualidad metodológica responde a la necesidad de evaluar el comportamiento dinámico desde un enfoque teórico riguroso y, al mismo tiempo, incorporar herramientas de simulación que permitan aproximarse a condiciones más cercanas a la realidad operativa.

Los métodos analíticos, aunque ampliamente utilizados debido a su simplicidad y rapidez en el cálculo, presentan limitaciones al momento de representar con fidelidad el comportamiento dinámico completo de sistemas reales. Según Samanta y Maheshwari (2024), estos modelos tienden a ofrecer resultados aceptables en condiciones controladas, pero no logran describir adecuadamente configuraciones geométricas complejas o variaciones en los parámetros del sistema. Por ello, apoyarse exclusivamente en métodos analíticos puede restringir la aplicabilidad de los resultados en situaciones reales de diseño de fundaciones para maquinaria rotativa.

En respuesta a estas limitaciones, el Método de Elementos Finitos (MEF) ha demostrado ser una herramienta robusta y versátil. Investigaciones recientes, como las de Alzabeebee (2020), destacan cómo las capacidades computacionales actuales permiten representar con mayor detalle las condiciones dinámicas del sistema suelo-estructura, sin depender de simplificaciones geométricas excesivas. Además, el enfoque combinado de métodos analíticos y numéricos ha sido respaldado por estudios como el de Das y Ghosh (2024), quienes concluyen que esta estrategia mejora la confiabilidad de los resultados y aporta una visión más completa del comportamiento del sistema, sin comprometer la eficiencia computacional, lo que la convierte en una opción viable para aplicaciones técnicas reales.

2.3 MARCO CONCEPTUAL DE LA TEORÍA DE VIBRACIONES

Las acciones que pueden producir efectos dinámicos aparte del sismo sobre las estructuras son las debidas a máquinas vibratorias que generan ondas armónicas o impulsivas. La investigación en el diseño de fundaciones para máquinas ha sido clave desde Gieger (1922) sobre frecuencias naturales hasta Barkan (1948) y Major (1962). Srinivasulu y Vaidyanathan (1976) y Arya, O'Neill y Pincus (1979) consolidaron teorías importantes en este campo. La industrialización ha resaltado la importancia de la Interacción Dinámica Suelo-Estructura (IDSE), siendo esta “un análisis complejo que aún se investiga para reducir las incertidumbres que lo persiguen” (Chowdhury y Dasgupta, 2009a, p. 507).

El análisis dinámico de fundaciones para máquinas requiere considerar tanto las cargas estáticas como las dinámicas transmitidas al suelo. Es esencial determinar la frecuencia natural del sistema máquina-fundación-suelo y las amplitudes de vibración, ya que la resonancia puede causar desplazamientos excesivos y asentamientos significativos (Das y Ramana, 2011). La **Figura 2.1**, ilustra los modos de vibrar de un sistema de fundación.

Las dimensiones de estas cimentaciones se establecen según las especificaciones operativas y del fabricante. La clasificación de máquinas, como rotativas, reciprocantes e impactantes, influye en el tipo de fundación (Herrera Castiblanco, 2017; ACI Committee 351, 2018). Las fundaciones pueden ser de bloques simples, combinadas con pedestales o de tipo pórtico.

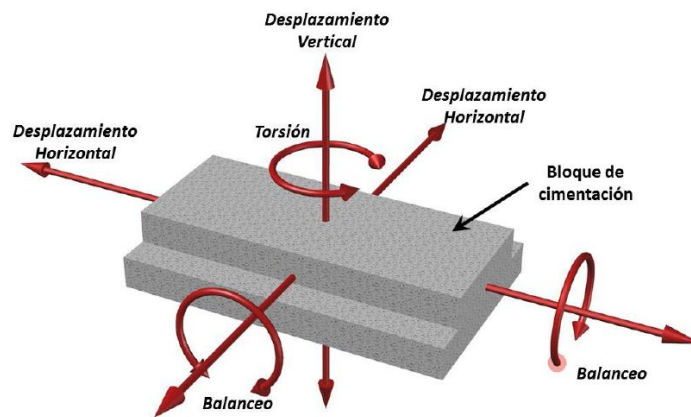


Figura 2.1. Grados de libertad y modos de vibrar de un sistema de fundación

Fuente: Muñoz (2013, p. 10)

Los materiales utilizados incluyen hormigón y acero, cada uno con sus ventajas y desventajas según el contexto (Chowdhury y Dasgupta, 2009a). La caracterización del suelo es clave, y se recomienda realizar pruebas de campo para evaluar propiedades como el módulo de corte dinámico (Chowdhury y Dasgupta, 2009b; Das y Ramana, 2011).

El análisis y diseño de este tipo de fundaciones requiere el conocimiento de la física y matemática de sistemas de un grado de libertad (1 GDL) y su extensión a múltiples grados de libertad (MGDL) para abordar problemas reales (Bhatia, 2008b; Das y Ramana, 2011).

A continuación, se presentan algunas definiciones importantes para una comprensión básica de la vibración.

- **Grados de Libertad:** El número de coordenadas necesarias para localizar su posición desplazada de la masa se llaman **Grados de Libertad (GDL)**.
- **Sistema con un solo Grado de Libertad:** En un sistema con **un solo grado de libertad (1 GDL)**, su posición desplazada se expresa por una sola coordenada.
- **Vibración Libre:** Se da cuando un sistema estructural oscila alrededor de su posición media tras ser liberado, sin fuerzas externas.
- **Vibración Forzada:** Si un sistema vibra bajo la influencia de una fuerza dinámica dependiente del tiempo, se denomina sistema con vibración forzada.

- **Amortiguación:** Cuando un sistema físico vibra desde su reposo y la vibración disminuye con el tiempo, se denomina proceso de amortiguación.

Los sistemas con 1 GDL se dividen en vibración libre (no amortiguado y amortiguado) y vibración forzada (no amortiguado y amortiguado) y son la base de todo análisis dinámico, sin embargo, para una mayor precisión se hace práctico y necesario considerar sistemas con 2 o 3 GDL (Bhatia, 2008b).

2.3.1 Sistemas con 3 grados de libertad - Vibración Libre y Forzada

El análisis se centra en sistemas no amortiguados, considerando la amortiguación solo en resonancia, ya que su influencia indistinta será abordada en la sección de **Métodos de Análisis Dinámico en Fundaciones Vibrantes**. En sistemas con 2 y 3 GDL, se tienen matrices de rigidez y masa de orden $[2 \times 2]$ y $[3 \times 3]$ respectivamente, donde las frecuencias naturales se obtienen de la ecuación de frecuencias representada por: $|K - M \omega_n^2| = 0$.

En el análisis de fundaciones consideradas como rígidas y con rigideces de traslación vertical; horizontal, o vertical y rotacional, se demuestra el desacoplamiento, permitiendo resolverlas de forma independiente. La siguiente combinación de resortes tienen aplicaciones prácticas y muestran el acoplamiento entre la traslación horizontal y la rotación. Aunque el resorte vertical se considera en situaciones reales, generalmente se desacopla del movimiento de traslación horizontal y rotación (Bhatia, 2008a).

2.3.1.1 Bloque rígido soportado por tres tipos de resortes (vibración libre)

El análisis se enfoca en un bloque rígido apoyado por resortes vertical, de traslación y de rotación, con el centroide **C** sobre el centro de rigidez **O**, alineados por un eje vertical y separados por una altura **h**. El bloque, restringido a moverse en el **plano (y-z)**, solo puede desplazarse en los ejes vertical **z**, lateral **y**, además de girar alrededor del eje **x**. Los resortes con rigidez **k_y**, **k_z**, y **k_φ** están conectados en **O**. El bloque tiene masa **m** y un momento de inercia de masa **I_{mcx}** alrededor del eje **x**, que pasa por el centroide **C**. El sistema descrito desde la posición en reposo hasta la desplazada, se ilustra en la **Figura 2.2**.

Del equilibrio de fuerzas en O'' según se muestra en la **Figura 2.2(c)**, obtenemos:

$$m \ddot{y} - m h \ddot{\phi} + k_y y = 0 \quad \text{Ec. (1)}$$

$$m \ddot{z} + k_z z = 0 \quad \text{Ec. (2)}$$

$$I_{mox} \ddot{\phi} - m h \ddot{y} + (k_\phi - m g h) \phi = 0 \quad \text{Ec. (3)}$$

Donde $I_{mox} = I_{mcx} + m h^2$, es el momento de inercia de masa del bloque sobre O .

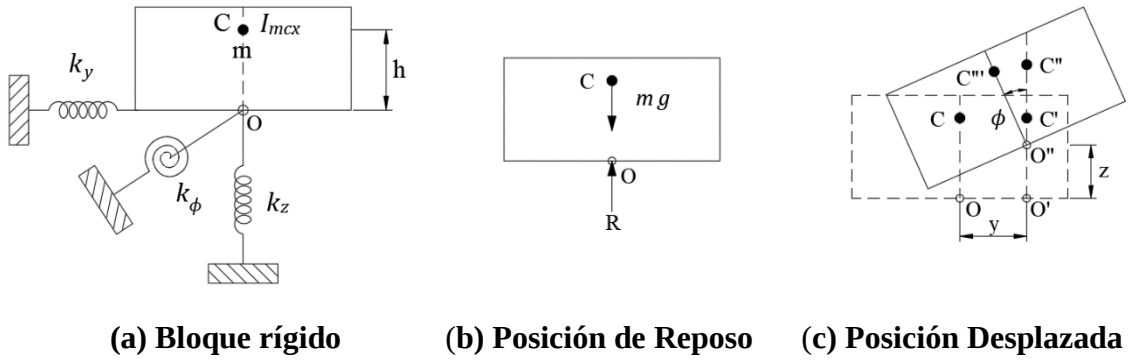


Figura 2.2. Bloque rígido soportado por tres tipos de resortes (vibración libre)

Fuente: Modificado de Bhatia (2008b, p. 3-76)

Reescribiendo las ecuaciones anteriores en su forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & -m h \\ 0 & m & 0 \\ -m h & 0 & I_{mox} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_y & 0 & 0 \\ 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & (k_\phi - m g h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que, a partir de las ecuaciones Ec. (1) a la Ec. (3), la Ec. (2) representa el movimiento en la dirección del eje z y está completamente desacoplada. En contraste, las ecuaciones Ec. (1) y Ec. (3) están acopladas. Según Rao (2012), si la matriz de masa no es diagonal, el sistema posee acoplamiento dinámico.

La Ec. (2) representa un Sistema No Amortiguado de 1 GDL y su frecuencia angular o natural se determina de la expresión:

$$\omega_{nz} = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \left[\frac{rad}{s} \right] \quad \text{Ec. (4)}$$

Con lo anterior, la expresión matricial de orden 3 con el término $\mathbf{mgh} = \mathbf{0}$, se reduce a:

$$\begin{bmatrix} m & -mh \\ -mh & I_{mox} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_y & 0 \\ 0 & k_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (5)}$$

Al sustituir la Ec. (5) en la ecuación de frecuencias $|\mathbf{K} - \mathbf{M} \omega_n^2| = 0$, se obtienen dos frecuencias naturales de vibración y se expresan por:

$$\omega_{n1}^2 = \frac{1}{2\gamma_x} (\omega_{ny}^2 + \omega_{n\phi}^2) - \frac{1}{2\gamma_x} \sqrt{(\omega_{ny}^2 + \omega_{n\phi}^2)^2 - 4\gamma_x \omega_{ny}^2 \omega_{n\phi}^2} \quad \text{Ec. (6)}$$

$$\omega_{n2}^2 = \frac{1}{2\gamma_x} (\omega_{ny}^2 + \omega_{n\phi}^2) + \frac{1}{2\gamma_x} \sqrt{(\omega_{ny}^2 + \omega_{n\phi}^2)^2 - 4\gamma_x \omega_{ny}^2 \omega_{n\phi}^2} \quad \text{Ec. (7)}$$

Donde γ_x es la relación de momentos de inercia de masa y ω_{ny} , $\omega_{n\phi}$ son las frecuencias naturales limite, dadas por las expresiones siguientes:

$$\gamma_x = \frac{I_{mcx}}{I_{mox}} \quad ; \quad \omega_{ny}^2 = \frac{k_y}{m} \quad ; \quad \omega_{n\phi}^2 = \frac{k_\phi}{I_{mox}} \quad \text{Ec. (8)}$$

Para el **plano (x-z)**, procediendo del mismo modo y con la ayuda de la **Figura 2.3** se obtiene:

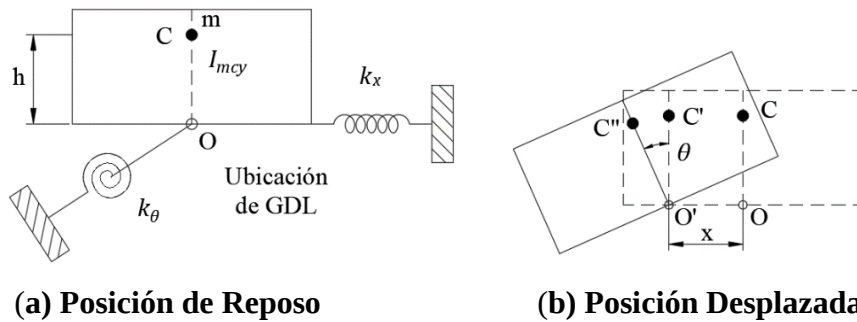


Figura 2.3. Bloque rígido apoyado en un resorte traslacional y rotacional plano x-z

Fuente: Modificado de Bhatia (2008b, p. 3-25)

$$\begin{bmatrix} m & mh \\ mh & I_{moy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (9)}$$

Donde $I_{moy} = I_{mcy} + m h^2$. La solución de la ecuación de frecuencias $|K - M \omega_n^2| = 0$ considerando la Ec. (9), nos da dos frecuencias naturales de vibración:

$$\omega_{n1}^2 = \frac{1}{2\gamma_y}(\omega_{nx}^2 + \omega_{n\theta}^2) - \frac{1}{2\gamma_y} \sqrt{(\omega_{nx}^2 + \omega_{n\theta}^2)^2 - 4\gamma_y \omega_{nx}^2 \omega_{n\theta}^2} \quad \text{Ec. (10)}$$

$$\omega_{n2}^2 = \frac{1}{2\gamma_y}(\omega_{nx}^2 + \omega_{n\theta}^2) + \frac{1}{2\gamma_y} \sqrt{(\omega_{nx}^2 + \omega_{n\theta}^2)^2 - 4\gamma_y \omega_{nx}^2 \omega_{n\theta}^2} \quad \text{Ec. (11)}$$

Aquí γ_y es la relación de momentos de inercia de masa y ω_{nx} , $\omega_{n\theta}$ son las frecuencias naturales limite, dadas por las expresiones:

$$\gamma_y = \frac{I_{mcy}}{I_{moy}} \quad ; \quad \omega_{nx}^2 = \frac{k_x}{m} \quad ; \quad \omega_{n\theta}^2 = \frac{k_\theta}{I_{moy}} \quad \text{Ec. (12)}$$

Con el análisis realizado aquí se afirma que, un sistema con 3 GDL se descompone en:

- Un sistema con 1 GDL que puede resolverse de forma independiente.
- Un sistema con 2 GDL acoplado dinámicamente o inercialmente.

El sistema analizado podrá descomponerse, siempre que el centroide **C** esté alineado verticalmente con la base en **O**. Así, un sistema de 6 GDL se analiza con 1 GDL para el modo vertical y de torsión; con 2 GDL para los modos acoplados por plano (y-z) o (x-z).

2.3.1.2 Bloque rígido soportado por tres tipos de resortes (vibración forzada)

El análisis considera el mismo bloque de la **Figura 2.2** en el **plano (y-z)**, sometido a fuerzas dinámicas $F_{oy} \sin(\omega t)$; $F_{oz} \sin(\omega t)$ y aplicadas en P (véase **Figura 2.4**).

Transferencia de fuerzas dinámicas al centro de rigidez O: Por equilibrio, se tiene:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{oy} \sin(\omega t) \\ F_{oz} \sin(\omega t) \\ M_{o\phi} \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad \text{Donde: } M_{o\phi} = -s F_{oy} \quad \text{Ec. (13)}$$

Ecuación de Movimiento: Adicionando la Ec. (13) en el miembro derecho de las ecuaciones Ec. (1) a la Ec. (3) en vibración libre, obtenemos el movimiento forzado:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & -mh \\ 0 & m & 0 \\ -mh & 0 & I_{mox} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_y & 0 & 0 \\ 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & k_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{oy} \sin(\omega t) \\ F_{oz} \sin(\omega t) \\ M_{o\phi} \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

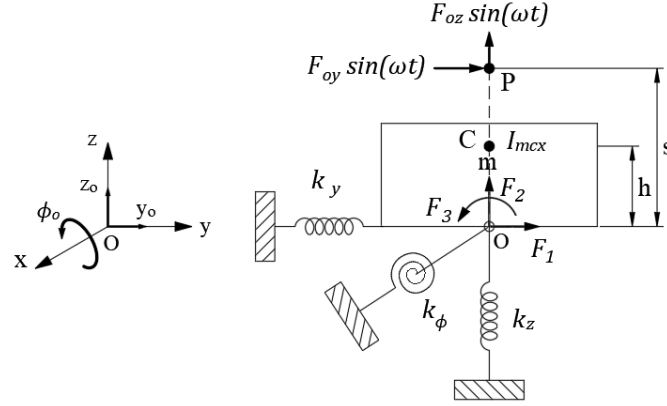


Figura 2.4. Fuerzas en un bloque rígido apoyado en tres resortes (vibración forzada)

Fuente: Modificado de Bhatia (2008b, p. 3-86)

Como el movimiento vertical se encuentra desacoplado, es posible separarlo de forma que:

$$m \ddot{z} + k_z z = F_{oz} \sin(\omega t) \quad \text{Ec. (14)}$$

$$\begin{bmatrix} m & -mh \\ -mh & I_{mox} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_y & 0 \\ 0 & k_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{oy} \sin(\omega t) \\ M_{o\phi} \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (15)}$$

La Ec. (14) representa el movimiento de un Sistema No Amortiguado de 1 GDL en vibración forzada, cuya respuesta máxima en el punto **O** se obtiene de:

$$z_0 = \delta_z \frac{1}{(1 - \beta_z^2)} \quad ; \quad \delta_z = \frac{F_{oz}}{k_z} \quad ; \quad \beta_z = \frac{\omega}{\omega_{nz}} \quad \text{Ec. (16)}$$

La Ec. (15) describe el movimiento acoplado en el **plano (y-z)**. Por lo tanto, resolviendo el sistema tendremos las ecuaciones para la respuesta estacionara o estable en el punto **O** y para hallar las máximas respuestas se sustituye **$\sin(\omega t) = 1$** , obteniéndose lo siguiente:

$$y_0 = \delta_y \frac{(1 - \beta_\phi^2)}{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} - h\delta_\phi \frac{\beta_y^2}{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} \quad \text{Ec. (17)}$$

$$\phi_0 = \delta_\phi \frac{(1 - \beta_y^2)}{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} - \delta_y \frac{mh}{I_{mox}} \frac{\beta_\phi^2}{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} \quad \text{Ec. (18)}$$

Donde: $\delta_y = \frac{F_{oy}}{k_y}$; $\delta_\phi = \frac{M_{o\phi}}{k_\phi}$; $\beta_y = \frac{\omega}{\omega_{ny}}$; $\beta_\phi = \frac{\omega}{\omega_{n\phi}}$; $\beta_1 = \frac{\omega}{\omega_{n1}}$; $\beta_2 = \frac{\omega}{\omega_{n2}}$

Con un procedimiento similar es posible demostrar, que para el **plano (x-z)** el movimiento dinámico acoplado forzado, estará definido por la siguiente expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} m & mh \\ mh & I_{moy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ox} \sin(\omega t) \\ M_{o\theta} \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (19)}$$

Con la solución de la Ec. (19), se logra obtener la respuesta del sistema en el **plano (x-z)**, cuyas amplitudes máximas en **O** a partir de la sustitución de $\sin(\omega t) = 1$, son:

$$x_0 = \delta_x \frac{(1 - \beta_\theta^2)}{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} + h\delta_\theta \frac{\beta_x^2}{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} \quad \text{Ec. (20)}$$

$$\theta_0 = \delta_\theta \frac{(1 - \beta_x^2)}{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} + \delta_x \frac{mh}{I_{moy}} \frac{\beta_\theta^2}{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)} \quad \text{Ec. (21)}$$

Donde: $\delta_x = \frac{F_{ox}}{k_x}$; $\delta_\theta = \frac{M_{o\theta}}{k_\theta}$; $\beta_x = \frac{\omega}{\omega_{nx}}$; $\beta_\theta = \frac{\omega}{\omega_{n\theta}}$; $\beta_1 = \frac{\omega}{\omega_{n1}}$; $\beta_2 = \frac{\omega}{\omega_{n2}}$

2.3.2 Amplitudes en Resonancia

Lo expuesto en la sección 2.3.1 es aplicable solo a sistemas no amortiguados, limitándose a condiciones alejadas de la resonancia (Bhatia, 2008b). Chowdhury y Dasgupta (2009a) indican que, sin otra técnica, se asume un análisis conservador sin amortiguamiento. Sin embargo, cuando las frecuencias naturales se acercan a la velocidad de operación de la máquina, las respuestas previas pueden no ser válidas (Saran, 2021).

Por lo que, para evaluar la respuesta en resonancia, especialmente las ecuaciones solución de sistemas acoplados deben modificarse para tomar en cuenta dicha resonancia (Bhatia, 2008b). Aprovechando el análisis realizado para un sistema de 1 GDL amortiguado, se puede argumentar lo siguiente:

- i) En caso de resonancia con la frecuencia natural vertical ω_{nz} , la respuesta del sistema desacoplado en resonancia puede obtenerse sustituyendo la expresión $(1 - \beta_z^2)$ en el denominador por $\sqrt{(1 - \beta_z^2)^2 + (2\beta_z D_z)^2}$ en la ecuación Ec. (16).
- ii) Para el modo acoplado con y, ϕ en caso de resonancia con la **primera frecuencia natural**, la respuesta en resonancia se obtiene reemplazando el término $(1 - \beta_1^2)$ en el denominador por $\sqrt{(1 - \beta_1^2)^2 + (2\beta_1 D_1)^2}$ en las ecuaciones Ec. (17) y Ec. (18), manteniendo el signo de toda la expresión radical igual que para $(1 - \beta_1^2)$.
- iii) En caso de resonancia con la **segunda frecuencia natural** para el movimiento acoplado de y, ϕ , la respuesta en resonancia se obtiene reemplazando el término $(1 - \beta_2^2)$ por $\sqrt{(1 - \beta_2^2)^2 + (2\beta_2 D_2)^2}$ en las ecuaciones Ec. (17) y Ec. (18), manteniendo el signo de toda la expresión radical igual que para $(1 - \beta_2^2)$.

Donde β_i (relación de frecuencia) es la relación entre la frecuencia de excitación y la frecuencia natural del modo i correspondiente y D_i (relación de amortiguamiento) es la relación entre el amortiguamiento del sistema del modo i y el amortiguamiento crítico.

Para considerar el movimiento en el plano (x-z), se deben realizar modificaciones similares a las descritas anteriormente. Para el movimiento de torsión en el plano (x-y) (alrededor del eje z), la respuesta no amortiguada y en resonancia puede determinarse de forma análoga a sistemas de un grado de libertad, ya que este se encuentra desacoplado.

Todas las respuestas analizadas anteriormente están ubicadas en el centro de rigidez (punto **O**) del sistema. Para obtener la respuesta en la parte superior de la fundación u otra ubicación, los cálculos deben ajustarse adecuadamente mediante una **transformación geométrica**. Estos detalles serán abordados en el capítulo siguiente.

2.4 MÉTODOS DE ANÁLISIS DINÁMICO EN FUNDACIONES VIBRANTES

En el acápite 2.3 se trató lo esencial de la teoría fundamental de la dinámica estructural aplicada a fundaciones de máquinas. Esta sección presenta metodologías clave, incluyendo el método analítico de la teoría clásica de vibraciones y el método de elementos finitos (MEF), aplicadas al análisis de fundaciones con fuerzas periódicas.

2.4.1 Análisis dinámico clásico y con formulación de Lagrange

Lo visto en la sección 2.3, puede considerarse como el análisis clásico de la teoría de vibraciones, con un enfoque práctico y con cierta similitud a lo que Barkan (1962) analizó utilizando el principio de D'Alembert. Sin embargo, los conceptos de energía de Leibnitz y Lagrange también se utilizan para formular ecuaciones de movimiento, especialmente en sistemas con MGD, propios de la mecánica analítica (Meirovitch, 1986).

Este enfoque energético, conocido como la **formulación de Lagrange**, permite formular ecuaciones en términos de coordenadas generalizadas de energía cinética y potencial del sistema. Antes de presentar esta formulación, se va escribir la ecuación matricial de movimiento basada en el principio de D'Alembert para el plano (x-z), propuesto por Barkan (1962), del cual deriva el concepto de acoplamiento estático (matriz de masa diagonal y matriz de rigidez simétrica).

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_{mcy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & -k_x h \\ -k_x h & k_\theta + k_x h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{cx} \sin(\omega t) \\ M_{c\theta} \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (22)}$$

En esta ecuación matricial, la fuerza $F_{cx} \sin(\omega t)$ y el momento $M_{c\theta} \sin(\omega t)$ actúan en el centro de gravedad del sistema de fundación (punto C). Se observa que la ecuación matricial presentada difiere de la Ec. (19) en el tipo de acoplamiento y que esta última puede reproducirse mediante el enfoque de Lagrange. El concepto energético de Lagrange establece que en un sistema conservativo, la suma de la energía cinética (T) y potencial (U) es constante: $d(T + U) = 0$. Las energías cinética y potencial se representan como funciones de los vectores de desplazamiento q_i y velocidad $\dot{q}_i$ en coordenadas generalizadas, de la siguiente manera:

$$T = f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n) \text{ y } U = f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$$

Derivando las energías cinética y potencial, se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{Ec. (23)}$$

Aquí, F_i es la fuerza generalizada no conservadora correspondiente a la i -ésima coordenada generalizada q_i , y $\dot{q}_i$ es la velocidad generalizada (Rao, 2012).

Empleando la Ec. (23), en un sistema de fundación para máquina con 2 GDL, en vibración forzada y acoplado en el plano (x-z), tendremos:

$$\text{Energía cinética del sistema: } T = \frac{1}{2} m (\dot{x} + h \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} I_{mcy} \dot{\theta}^2$$

Tomando como referencia el centro de rigidez O , la energía potencial del sistema será:

$$U = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_\theta \theta^2$$

Sacando las derivadas correspondientes para la energía cinética y potencial, se obtienen:

$$\text{Para la coordenada generalizada de traslación } x(t): \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + h \dot{\theta}) \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} + m h \ddot{\theta} \quad \text{siendo:} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = k_x x$$

$$\text{Para la coordenada generalizada de rotación } \theta(t): \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m h (\dot{x} + h \dot{\theta}) + I_{mcy} \dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = m h \ddot{x} + m h^2 \ddot{\theta} + I_{mcy} \ddot{\theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = k_\theta \theta$$

Sustituyendo las expresiones anteriores y las fuerzas generalizadas definidas como F_1 y F_2 en las ecuaciones de Lagrange, obtenemos:

$$m \ddot{x} + m h \ddot{\theta} + k_x x = F_1 = F_{ox} \sin(\omega t)$$

$$m h \ddot{x} + (I_{mcy} + m h^2) \ddot{\theta} + k_\theta \theta = F_2 = M_{o\theta} \sin(\omega t)$$

Reescribiendo las ecuaciones de movimiento encontradas en su forma matricial y considerando que $I_{moy} = I_{mcy} + mh^2$, se logra obtener:

$$\begin{bmatrix} m & mh \\ mh & I_{moy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ox} \sin(\omega t) \\ M_{o\theta} \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se demuestra que esta expresión matricial es idéntica a la Ec. (19) para el plano (x-z). A pesar de la técnica mostrada en este apartado, vino el problema de la introducción del amortiguamiento. Según Chowdhury y Dasgupta (2009b), el amortiguamiento es un concepto complejo y aún no completamente comprendido por los físicos, haciendo que muchos analistas lo desestimen, debido a que su inclusión pueda complicar bastante el problema. Para el método de análisis clásico, que puede extenderse a sistemas más complejos mediante la formulación de Lagrange, el efecto de amortiguación en el sistema se considerará siguiendo lo recomendado en el apartado 2.3.2.

2.4.2 Análisis dinámico por el método de la respuesta modal

Este método se extiende a sistemas con MGD en vibración libre o forzada, con o sin amortiguamiento, incluso en aquellos con acoplamiento dinámico o inercial (matriz de masa no diagonal) y acoplamiento estático o elástico (matriz de rigidez no diagonal). Es aplicable a cálculos manuales en sistemas de 2 a 3 GDL, lo que facilita su implementación informática. Utiliza eigenvalores para el análisis dinámico, donde, según Chowdhury y Dasgupta (2009b), la evaluación de los valores y vectores propios corresponde a la frecuencia natural y las formas modales del sistema.

De acuerdo con Chowdhury y Dasgupta (2009b) y Meirovitch (1986), este análisis transforma el sistema en nuevas coordenadas, descomponiéndolo en sistemas individuales de masa, resorte y amortiguación de 1 GDL, facilitando su estudio. Si bien el amortiguamiento viscoso puede introducirse en la ecuación transformada para sistemas forzados con amortiguamiento, el principal problema es el desacoplamiento ortogonal, debido a la no proporcionalidad del amortiguamiento respecto a la masa y la rigidez

(Chowdhury y Dasgupta, 2009a). La siguiente expresión conocida como **Amortiguamiento Proporcional de Rayleigh**, permite abordar el problema mencionado:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad \text{Ec. (24)}$$

Donde los coeficientes α y β son los coeficientes arbitrarios de Rayleigh, determinados en función de las frecuencias del sistema. Bajo estas consideraciones, se escribe la ecuación de movimiento amortiguado en vibración forzada y en su forma matricial, como:

$$[M] \{\ddot{X}\} + [C] \{\dot{X}\} + [K] \{X\} = \{P_0\} \sin(\omega t) \quad \text{Ec. (25)}$$

Sustituyendo la Ec. (24) en la Ec. (25), se obtiene:

$$[M] \{\ddot{X}\} + [\alpha [M] + \beta [K]] \{\dot{X}\} + [K] \{X\} = \{P_0\} \sin(\omega t) \quad \text{Ec. (26)}$$

Se considera que la ecuación del vector de respuestas $\{X\}$ en coordenadas globales y en términos del vector de coordenadas transformadas o generalizadas $\{\xi\}$, está dada por:

$$\{X\} = [\varphi] \{\xi\} \quad \text{Ec. (27)}$$

Donde $[\varphi]$ es la matriz de autovectores normalizados. Al sustituir la Ec. (27) y sus derivadas respectivas en la Ec. (26), se obtiene:

$$[M] [\varphi] \{\ddot{\xi}\} + [\alpha [M] [\varphi] + \beta [K] [\varphi]] \{\dot{\xi}\} + [K] [\varphi] \{\xi\} = \{P_0\} \sin(\omega t) \quad \text{Ec. (28)}$$

De la premultiplicación por $[\varphi]^T$ en la Ec. (28), obtenemos:

$$[\varphi]^T [M] [\varphi] \{\ddot{\xi}\} + [\alpha [\varphi]^T [M] [\varphi] + \beta [\varphi]^T [K] [\varphi]] \{\dot{\xi}\} + [\varphi]^T [K] [\varphi] \{\xi\} = [\varphi]^T \{P_0\} \sin(\omega t) \quad \text{Ec. (29)}$$

Para **sistemas con múltiples grados de libertad (MGDL) amortiguados y en vibración forzada**, la Ec. (29) se transformará en:

$$\ddot{\xi}_i + 2 \zeta_i \omega_i \dot{\xi}_i + \lambda_i \xi_i = p_{0i} \sin(\omega t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{Ec. (30)}$$

Donde $\lambda_i = \omega_i^2 = \frac{k_i}{m_r}$; $m_r = \mathbf{1}$; $p_{0i} = [\varphi]^T \{P_0\}$. El termino ζ_i según Rao (2012), se conoce como relación de amortiguamiento modal para el modo normal i-ésimo y se determina con la siguiente expresión general:

$$\alpha + \omega_i^2 \beta = 2 \zeta_i \omega_i \quad \text{Ec. (31)}$$

La Ec. (30) muestra que las n ecuaciones están desacopladas, lo que permite determinar la respuesta del modo i-ésimo de forma análoga al de un sistema amortiguado forzado de 1 GDL. Luego, estas respuestas se reemplazan en la ecuación Ec. (27) para obtener las mismas en coordenadas globales del sistema original.

Por otra parte, para determinar el termino ζ_i , por ejemplo, para sistemas con 2 GDL, el procedimiento a seguir será el siguiente: con la matriz de amortiguamiento del sistema $[C]$, obtenida con las propiedades del suelo e IDSE, se reconoce que no desacoplará bajo la transformación ortogonal, por ende, se hace necesario corregirlo a partir de los coeficientes de **Rayleigh** vistos en la Ec. (24). Pero antes se deberá calcular lo siguiente:

Relación de amortiguamiento modal para el **primer** y **segundo modo**:

$$\zeta_1 = \frac{\{\varphi_{n1}\}^T [C] \{\varphi_{n1}\}}{2 \omega_1} \quad ; \quad \zeta_2 = \frac{\{\varphi_{n2}\}^T [C] \{\varphi_{n2}\}}{2 \omega_2} \quad \text{Ec. (32)}$$

Donde ω_1, ω_2 y $\{\varphi_{n1}\} = \begin{bmatrix} \frac{\varphi_{11}}{FS_1} \\ \frac{\varphi_{12}}{FS_1} \end{bmatrix}$, $\{\varphi_{n2}\} = \begin{bmatrix} \frac{\varphi_{21}}{FS_2} \\ \frac{\varphi_{22}}{FS_2} \end{bmatrix}$, son las frecuencias naturales y los

autovectores normalizados para cada modo correspondiente, siendo FS_1 y FS_2 los factores de escala según el modo, definidos como:

$$FS_1 = \sqrt{\{\varphi_1\}^T [M] \{\varphi_1\}} \quad \text{Ec. (33)}$$

$$FS_2 = \sqrt{\{\varphi_2\}^T [M] \{\varphi_2\}} \quad \text{Ec. (34)}$$

Con estas relaciones ζ_1 y ζ_2 , se resuelve el sistema de ecuaciones de la Ec. (31) para hallar los coeficientes de Rayleigh. Aunque no es necesario, esto solo sirve para comprobar la

transformación ortogonal del amortiguamiento dada por la Ec. (24). Para sistemas con MGD, la Ec. (31) se resuelve solo para los modos significativos. Según Chowdhury y Dasgupta (2009b), el factor de participación de masa modal es un buen indicador para identificar los modos con vibración significativa.

2.4.3 Análisis dinámico por integración directa (principios de diferencia finita)

El método de análisis dinámico por integración directa, basado en los principios de diferencias finitas, es preferido sobre la respuesta modal porque, según Chowdhury y Dasgupta (2009a), no requiere la transformación de ecuaciones, lo que permite operar directamente con la velocidad, aceleración y desplazamiento en las integrales.

Según Rao (2012), los esquemas de integración numérica se dividen en varias técnicas, entre las cuales destacan el método de la diferencia central, Runge-Kutta, Houbolt, Wilson- θ y Newmark- β . Los dos primeros son métodos explícitos, mientras que los tres últimos son implícitos.

La técnica de diferencia finita usa derivadas a través de fórmulas directas, inversas y centrales, siendo la diferencia central la más precisa (Rao, 2012).

Se enfatizará en el método de la diferencia central, describiendo brevemente su aplicación al caso de la fundación de máquina. La literatura ya ofrece un desarrollo matemático más amplio para estas técnicas, que sin duda son útiles para la implementación informática.

2.4.3.1 Método de la diferencia central (sistemas lineales con MGD)

De acuerdo a Chopra (2020), el método de la diferencia central para sistemas con 1 GDL, se puede extender a sistemas con 2 GDL y MGD. Este método utiliza un intervalo de tiempo o paso de tiempo Δt para calcular desplazamientos mediante una fórmula de recurrencia, permitiendo resolver ecuaciones en coordenadas originales o transformadas.

El procedimiento general se divide en tres pasos, estos se pueden resumir mediante el siguiente esquema de la **Figura 2.5**.

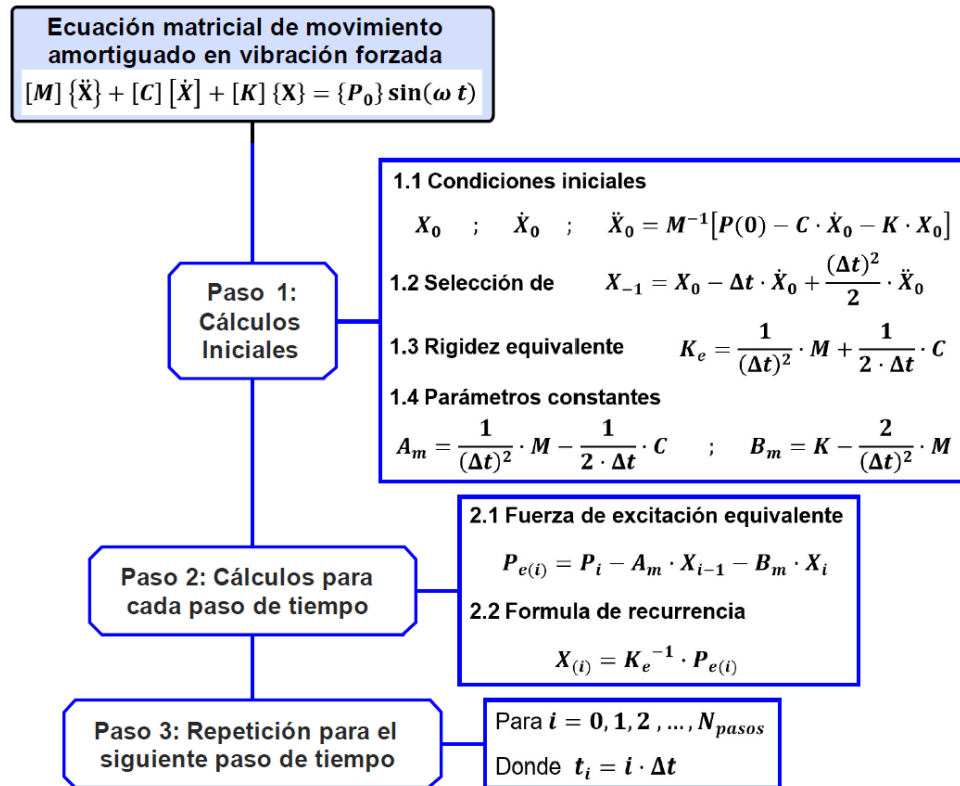


Figura 2.5. Pasos del método de la diferencia central para sistemas con MGD

Fuente: Modificado de Chopra (2020, p. 658)

Repetir los cálculos desde el Paso 2 hasta la convergencia permite obtener las máximas amplitudes de desplazamiento en estado transitorio y en estado estable.

2.4.3.2 Selección del paso de tiempo para el método de integración directa

En el método de la diferencia central, es fundamental no exceder el paso de tiempo límite Δt_{lim} , ya que un valor excesivo provoca inestabilidad y crecimiento ilimitado de los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración (Chowdhury y Dasgupta, 2009a). El paso de tiempo debe ser adecuado: no demasiado pequeño por el costo del análisis ni demasiado grande para evitar inestabilidad.

Según Rao (2012), la técnica descrita es estable para $\Delta t_{lim} \leq T_i/\pi$, donde T_i es el periodo de tiempo más largo sin amortiguamiento del sistema dinámico que tiene n grados de libertad.

Para un sistema de fundación de máquina simplificado a 2 GDL, encontrar T_i no representará un problema. Sin embargo, según Chowdhury y Dasgupta (2009a), en el análisis con el método de elementos finitos (MEF) con muchos nodos, T_i puede ser muy pequeño. Surge entonces la pregunta: ¿en qué casos la estructura permite grandes valores de $\Delta t/T_i$ y cuál es la contribución de los modos superiores considerados insignificantes?

Algunos investigadores usan valores empíricos para el paso de tiempo o la técnica de iteración inversa. Sin embargo, Chowdhury y Dasgupta (2009a) proponen un enfoque práctico incluso para modelar problemas dinámicos con el MEF, seleccionando una frecuencia de corte basada en la contribución significativa de la carga dinámica. Esto se logra limitando la relación entre la frecuencia de la máquina y la del sistema al 25%, asegurando que la respuesta no amortiguada se asemeje a la deflexión estática.

Lo anterior permite establecer adecuadamente el tamaño del paso de tiempo. A continuación, se detallan los pasos necesarios para determinar de forma efectiva el valor de Δt para el análisis dinámico:

- Seleccionar una frecuencia donde exista la contribución significativa de carga dinámica, es decir considerar la frecuencia de corte como: $\omega_{co} = 4 \omega$
- Determinar el periodo de corte o periodo límite con: $T_{co} = \frac{2\pi}{\omega_{co}}$
- Seleccionar el tamaño del paso de tiempo con la expresión: $\Delta t = \frac{T_{co}}{20}$

Los pasos anteriores también pueden resumirse aplicando las siguientes fórmulas:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{T}{80} \quad \text{Ec. (35)}$$

2.4.4 Análisis dinámico por el método de elementos finitos (MEF)

El MEF permite simular geometrías complejas, incorporar diferentes leyes constitutivas y analizar tensiones localmente (Grange y Salciarini, 2021). En sistemas de fundación para máquinas, mejora la confiabilidad al integrar máquina, base y suelo (American Society of

Civil Engineers, 2018). Aunque eficaz, este método requiere conocer las capacidades del software y realizar validaciones posteriores (Dechaumphai y Sucharitpwatskul, 2018).

2.4.4.1 Máquina y fuerzas dinámicas

El modelado de la máquina agrupa la masa en los nodos de los soportes o la conecta mediante enlaces rígidos a la fundación, garantizando que la masa total y el centro de gravedad coincidan con el problema físico (Cook et al., 2001). La máquina se considera rígida respecto al suelo y los cimientos (Bhatia, 2008b), y las fuerzas dinámicas deben ubicarse según las especificaciones técnicas del proveedor, como en los rodamientos o puntos de contacto en los pedestales. La magnitud de estas fuerzas dinámicas, particularmente en el caso de máquinas centrífugas, se detallan brevemente en la sección de **Parámetros de Diseño de la Máquina**.

2.4.4.2 Sistema de fundación

A continuación, se presentan algunas recomendaciones importantes para el modelado, según el tipo de elemento utilizado. Estos elementos están disponibles en muchos programas, por ejemplo, ABAQUS, ANSYS, GTSRUDL, STAAD PRO y SAP 2000.

- **Elementos de placa (Shell):** Para fundaciones de máquinas, es preferible usar elementos de placa gruesa (formulación Mindlin-Reissner) en lugar de placas delgadas (formulación Kirchhoff), debido al espesor considerable de la estructura (Chowdhury y Dasgupta, 2009b). El mallado debe utilizar principalmente cuadriláteros, ya que ofrecen mayor precisión que los triángulos (Petyt, 2010). Los elementos triangulares solo deben emplearse en geometrías irregulares donde la estructura lo requiera (Palazzolo, 2016).
- **Elementos sólidos (Solid):** Para el modelado de la fundación, los elementos sólidos hexaédricos son más efectivos que los tetraédricos o pentaédricos (Chowdhury y Dasgupta, 2009b). Estos elementos son ideales para representar detalles estructurales complejos como pedestales y cavidades para pernos de anclaje (Petyt, 2010).

Por otra parte, es fundamental contar con datos precisos de las propiedades del material de la fundación, tales como el módulo elástico, la densidad y la relación de Poisson. Estos parámetros serán revisados en la sección de **Parámetros de Diseño de la Fundación**.

2.4.4.3 Suelo de apoyo (condiciones de borde)

El suelo puede modelarse como un continuo o mediante resortes y amortiguamientos equivalentes, estos últimos son preferidos por su relación con los cálculos manuales (Chowdhury y Dasgupta, 2009b). Los códigos ACI Committee 351 (2018) y American Society of Civil Engineers (2018) recomiendan usar impedancias dinámicas para una representación más precisa del suelo. Los parámetros que influyen en la determinación de estos resortes y amortiguamientos equivalentes se muestran en la sección de **Parámetros de Diseño del Suelo**.

2.5 PARÁMETROS DE DISEÑO DE LA MÁQUINA

Los detalles del equipamiento y la ficha técnica del fabricante de la máquina ofrecen información extensa, pero solo se debe seleccionar la necesaria para el diseño de la cimentación (American Society of Civil Engineers, 2018).

Según Chowdhury y Dasgupta (2009b) y Bhatia (2008b), los datos traducidos a los parámetros de diseño de la máquina deben incluir:

- Masa total, ubicación general del centroide, masas de piezas giratorias, velocidad de funcionamiento, altura del eje (Shaft) del rotor de la máquina, etc.
- Detalles geométricos del marco base y ubicación de pernos de anclaje.
- Fuerzas dinámicas generadas por la máquina en condiciones de operación y falla.
- Toda información adicional acerca del número de hojas en el caso de ventiladores y turbinas, número de pistones en motores, etc., serán útiles y propios de cada caso.

Esta sección se centra en los parámetros de una máquina rotativa o centrífuga, siendo la turbina a gas el tipo de máquina considerada en el presente estudio.

2.5.1 Parámetros para máquinas rotativas

La mayoría de las máquinas rotativas operan entre 500 y 50,000 rpm, con componentes giratorios (rotores), estacionarios (estatores) y acoplamientos. Estas máquinas experimentan desequilibrio residual debido a la excentricidad del rotor, lo que genera fuerzas centrífugas que causan vibraciones y posibles daños (Palazzolo, 2016). Las fuerzas dinámicas dependen de la masa del rotor, la excentricidad y la velocidad de operación (García, 2012). Si no se disponen de estos datos, debe estimarse la excentricidad del rotor para calcular el desequilibrio (ACI Committee 351, 2018).

2.5.2 Excentricidad del rotor

El rotor de cada máquina rotativa se balancea conforme a un grado de calidad de equilibrio que depende de la velocidad de funcionamiento y el uso de la máquina. Este grado, denominado **Gr** (por ejemplo, G2.5, G6.3, G 16, G40, etc.), expresa el producto de la excentricidad **e** (en mm) y la velocidad angular del equipo **ω** (en rad/s). Por lo tanto, la excentricidad del rotor **e** (en metros) se puede calcular usando la relación de calidad de equilibrio **r** (en mm/s) y la velocidad angular **ω** , mediante la siguiente expresión:

$$e = \frac{r}{\omega} \cdot 10^{-3} [m] \quad \text{Ec. (36)}$$

De acuerdo con García (2012), existen estándares que especifican estos grados de calidad de equilibrio. Por ejemplo, la norma ISO 1940-1973(E) y la ACI Committee 351 (2018) recomiendan que, para equipos de proceso como turbinas a gas y vapor, turbocompresores, bombas impulsoras, se utilice un valor de: **$r \leq 2.5 \text{ mm/s}$** .

2.5.3 Fuerzas dinámicas de desequilibrio

Las fuerzas centrífugas del desbalanceo actúan en el centro de línea del rotor y varían con la velocidad, transmitiéndose al cimiento a través de los apoyos (Matsushita et al., 2017). La fuerza dinámica de desequilibrio **$F_{(t)}$** en (Newton) generada por la máquina se expresa

como $F_{(t)} = m_r e \omega^2 \sin(\omega t)$ o $F_{(t)} = F_o \sin(\omega t)$, donde F_o es la magnitud de la fuerza de desequilibrio y ω es frecuencia angular del rotor en rad/s.

De acuerdo con el código ACI Committee 351 (2018), la magnitud de la fuerza dinámica, dada la masa, la excentricidad del rotor y la frecuencia del equipo, se puede estimar con:

$$F_o = \frac{m_r e \omega^2 S_f}{1000} [N] \quad \text{Ec. (37)}$$

Donde:

F_o : Magnitud o amplitud de la fuerza dinámica en N

m_r : Masa rotativa en kg

e : Excentricidad de masa en mm

ω : Frecuencia angular de operación del equipo en rad/s

S_f : Factor de servicio, usado para tomar en cuenta un incremento en el desbalanceo durante la vida operativa del equipo, suministrado por el fabricante (usualmente ≥ 2).

Las fuerzas dinámicas a velocidad de funcionamiento afectan la respuesta estable del sistema, mientras que durante el arranque y apagado influyen en la respuesta transitoria. Según Chowdhury y Dasgupta (2009b) y Bhatia (2008b), la respuesta transitoria es crítica si las frecuencias naturales de la fundación son menores que la velocidad de la máquina.

2.6 PARÁMETROS DE DISEÑO DE LA FUNDACIÓN

Esta sección se enfoca en la selección de las propiedades del material de la fundación, la excentricidad y los límites de vibración aceptables para su análisis.

2.6.1 Propiedades del material de la fundación

El hormigón armado es el material habitual para fundaciones de máquinas, aunque en casos específicos se pueden utilizar perfiles de acero estructural. Según el ACI Committee 351 (2018), estos cimientos se diseñan principalmente en función de la masa y rigidez.

2.6.1.1 Resistencia y otras propiedades del hormigón

El ACI Committee 351 (2018) sugiere una resistencia mínima de 28 MPa para fundaciones de máquinas, mientras que el código indio IS 456-2000 (2021) recomienda grados de hormigón M-20 a M-30 (véase **Tabla 2.1**). No obstante, estas recomendaciones pueden variar según el país y es fundamental consultar las normativas locales.

Tabla 2.1. Propiedades del hormigón estructural

Grado del Hormigón:	M-20	M-25	M-30
Resistencia Característica f'_c en [MPa]:	20	25	30
Densidad de Masa del Hormigon en kg/m^3 (Todos los Grados):	2500		
Coefficiente de Poisson (Para todos los Grados):	0.20		

Fuente: Modificado de IS 456-2000 (2021, p. 16)

2.6.1.2 Modulo elástico del hormigón

El módulo elástico del hormigón varía según su resistencia, y se han realizado varios estudios para correlacionar el módulo estático E y el dinámico $E_{dynamic}$. Muchos investigadores han observado que los niveles de deformación en las fundaciones de máquinas son bajos durante la operación dinámica. Por ello, el ACI Committee 351 (2018) recomienda usar el módulo estático, excepto en casos con altas deformaciones.

2.6.1.3 Resistencia del acero de refuerzo

Las propiedades de las barras de refuerzo pueden variar según las normas locales. De acuerdo al código ACI Committee 351 (2018) y ASTM A615/A615M, el acero de refuerzo Grado 60 ($f_y = 420 \text{ MPa}$) es común en fundaciones de máquinas, recomendándose grados equivalentes de hormigón y acero específicos para cada país.

2.6.2 Excentricidad de la fundación

La ausencia de excentricidad asegura una presión uniforme sobre el suelo y desvincula el modo de vibración vertical de los modos de traslación horizontal y balanceo del sistema,

simplificando el análisis manual. El ACI Committee 351 (2018) y otros investigadores recomiendan que la excentricidad no supere el 5% de las dimensiones en planta de la fundación, y para fundaciones largas ($L/B > 3$), se sugiere mantenerla dentro del 2%.

2.6.3 Límites de vibración para fundaciones de máquinas

Con base en la información disponible en la literatura y en los registros de vibración medidos en varios tipos de máquinas, las recomendaciones generales de amplitudes permisibles para el análisis de fundaciones se presentan en la **Tabla 2.2** (Bhatia, 2008b).

En ausencia de límites de amplitud del fabricante, el ACI Committee 351 (2018) sugiere los criterios de Blake (1964) y los modificados por Arya et al. (1979), quienes presentaron una tabla de vibraciones estándar con índices de desempeño del equipo.

Tabla 2.2. Amplitudes admisibles según el tipo de máquina

TIPO DE MÁQUINA	AMPLITUDES ADMISIBLES EN MICRONES
FUNDACIONES PARA MÁQUINAS TIPO ROTATIVAS	
Máquinas de Velocidad Baja	
Velocidad de Operación (100 a 500 rpm)	200 a 80
Velocidad de Operación (500 a 1500 rpm)	80 a 40
Máquinas de Velocidad Media	
Velocidad de Operación (1500 a 3000 rpm)	40 a 20
Máquinas de Velocidad Alta	
Velocidad de Operación (3000 a 10000 rpm) y por encima de 10000 rpm	20 a 5
FUNDACIONES PARA MÁQUINAS TIPO RECÍPROCAS	
Velocidad de Operación (300 a 1500 rpm)	1000 a 200
Velocidad de Operación (100 a 300 rpm)	1000
FUNDACIONES PARA MÁQUINAS TIPO IMPACTO	
Fundaciones para Martillos	1000 a 4000

Fuente: Modificado de Bhatia (2008b, p. 7-10)

También Baxter y Bernhard (1967) establecieron tolerancias generales de vibración utilizando un cuadro de severidad que va desde extremadamente suave hasta muy rigurosa. Para mayores detalles adicionales, se pueden revisar los trabajos de Blake, Richart, Hall y Woods (1970), quienes complementaron estos criterios de vibración límite.

2.7 PARÁMETROS DE DISEÑO DEL SUELO

La vibración de fundaciones influenciadas por máquinas rotativas es importante en la dinámica de suelos, ya que los avances teóricos han permitido comprender la Interacción Dinámica Suelo-Estructura (IDSE) (Chowdhury y Dasgupta, 2009b).

2.7.1 Aspectos del suelo que influyen en la IDSE

Los aspectos significativos del suelo que afectan la IDSE son:

- **Mecanismo de Transferencia de Energía:** La energía se transfiere al suelo a través de ondas (Das y Ramana, 2011). Las ondas superficiales o de Rayleigh, que transportan alrededor del 60% o más de la energía total, son más significativas que las ondas de compresión y corte (Chowdhury y Dasgupta, 2009a).
- **Participación de la masa de suelo en la vibración:** La variabilidad en la masa podría afectar la frecuencia natural del sistema; se sugiere ignorar la masa en fundaciones sub-sintonizadas ($\omega_n < \omega$) (Das y Ramana, 2011; Bhatia, 2008b).
- **Efecto de empotramiento de la fundación:** El embebido reduce las amplitudes de vibración y debe considerarse en sistemas reales (Das y Ramana, 2011).
- **Efecto de estratificación:** En suelos naturales, generalmente estratificados, el módulo de corte aumenta con la profundidad (Jia, 2018). En casos donde el módulo de corte, densidad y relación de Poisson varíen con la profundidad, se debe calcular un promedio ponderado (Chowdhury y Dasgupta, 2009b).
- **Aplicabilidad de la ley de Hooke:** Se asume que el suelo actúa como material elástico hasta que la presión supera su límite elástico (Bhatia, 2008b).
- **Reducción del esfuerzo admisible:** Se debe mantener la presión total sobre la base dentro de límites elásticos, utilizando el criterio de reducción de capacidades admisibles del suelo según la velocidad de la máquina (Bhatia, 2008b).
- **Amortiguación en el suelo:** El suelo presenta amortiguación geométrica (radiación de energía) e interna (pérdida de energía por histéresis) y varía según el

tipo de suelo. El rango de amortiguación interna es de 0.01 a 0.1, recomendándose un valor medio de 0.05 (Whitman y Richart, 1967).

- **Parámetros dinámicos del suelo:** Incluyen al módulo dinámico de corte (G), coeficiente de Poisson (ν), relación de amortiguación (ζ) y densidad de masa (ρ).

Chowdhury y Dasgupta (2009b) y Jia (2018) indican que la deformación por corte en fundaciones es inferior al $3 \times 10^{-4}\%$, coincidiendo con el rango de deformación bajo observado en la mayoría de pruebas de campo o laboratorio para determinar el módulo de corte dinámico. Diversos investigadores sugieren que este módulo debe determinarse mediante pruebas de campo, como del orificio transversal sísmico (Cross hole) o el fondo de pozo sísmico (Down hole), ya que estas son más fiables que las correlaciones teóricas.

2.7.2 Modelos simplificados para considerar la IDSE

La teoría de vibración mecánica, basada en masa concentrada, resorte y amortiguamiento, llevó al desarrollo de análogos del semiespacio elástico, que han coincidido bien con los resultados de campo (Chowdhury y Dasgupta, 2009a). Lamb (1904), Rayleigh (1885) y Love (1942) fueron pioneros en esta área, sentando las bases para desarrollos futuros. Reissner, Sung, Quinlan, Hsieh y Shekter ampliaron estas teorías, mientras que Lysmer, Richart, Whitman y Novak introdujeron análogos de resortes equivalentes.

El trabajo pionero de Lamb sobre la respuesta dinámica de medios infinitos y semi-infinitos sirvió de base para desarrollar soluciones para fundaciones bajo cargas dinámicas. Lysmer y Richart (1966) simplificaron el modelo de fundación circular sometida a carga vibratoria armónica, sustituyendo el conjunto fundación-terreno por un resorte y amortiguador en paralelo, obteniendo resultados equivalentes a métodos más rigurosos. A partir de este modelo, surgieron más investigaciones, siendo George Gazetas el que acumuló el mayor número de publicaciones, cerrando el tema hasta el año 1991.

Las ventajas encontradas en la literatura de los modelos simplificados para la Interacción Dinámica Suelo-Estructura (IDSE) son: desarrollo en programas de ordenador, cálculos precisos con bajo esfuerzo computacional, base para Códigos y Normativas, cálculos

paramétricos sencillos y comprobación de cálculos complicados. Por otra parte, el modelo más popular que aún está vigente en el análisis de fundaciones para máquinas, es el de Barkan (1962), sin embargo, dicho modelo no será visto aquí, debido a que presenta las siguientes limitaciones:

- No considera el amortiguamiento, crucial en frecuencias bajas de operación.
- Ignora el efecto de empotramiento del suelo circundante.
- Utiliza un coeficiente de compresión elástica uniforme válido solo para profundidades superficiales y grandes áreas de contacto.

Las limitaciones de los diversos modelos llevaron a actualizar los procesos matemáticos para que se ajusten a la realidad. Así, el ingeniero puede estimar los resortes y amortiguamientos equivalentes en los 6 GDL mediante los siguientes enfoques:

- Para un rango de frecuencia limitado, las rigideces de los resortes y amortiguamientos prácticamente se pueden considerar constantes (Impedancias Estáticas) (ACI Committee 351, 2018; American Society of Civil Engineers, 2018).
- En un análisis más detallado, la rigidez del suelo varía con la frecuencia, por lo que los resortes y amortiguamientos son dependientes de la frecuencia de excitación (Impedancias Dinámicas) (ACI Committee 351, 2018; American Society of Civil Engineers, 2018).

En el siguiente capítulo, se presentarán las formulaciones de dos modelos simplificados que integran estos enfoques para la interacción dinámica suelo-estructura (IDSE).

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación es de tipo cuantitativo, explicativo y comparativo, con un enfoque documental y computacional. Se estudia la respuesta dinámica de una fundación tipo bloque con pedestal sometida a cargas periódicas generadas por una turbina a gas, utilizando dos enfoques metodológicos: los analíticos y otro basado en el método de elementos finitos (MEF). La comparación se efectúa manteniendo constantes las condiciones dinámicas generales (frecuencia de excitación, suelo, cargas y geometría general), modificando únicamente el espesor del cimiento.

El propósito del estudio es evaluar el grado de concordancia entre los resultados obtenidos por ambos enfoques en términos de frecuencias naturales y amplitudes máximas de vibración, con el fin de determinar el nivel de sensibilidad de cada modelo ante variaciones geométricas controladas, y con ello aportar criterios para valorar la aplicabilidad de los métodos analíticos y de elementos finitos en el diseño de fundaciones dinámicas apoyadas en suelos cohesivos.

3.2 UNIDAD DE ANÁLISIS

La unidad de análisis corresponde a una fundación tipo bloque con pedestal, hecha de hormigón armado y apoyada sobre suelo cohesivo. La fundación soporta una turbina a gas que genera excitación armónica de frecuencia crítica y constante. Se estudia la interacción suelo-fundación-máquina mediante modelación matemática y numérica, centrando el análisis en cómo varían las respuestas dinámicas (frecuencias naturales en Hz y amplitudes máximas de vibración en micrones) al modificar el espesor de la fundación.

3.3 INSTRUMENTOS Y HERRAMIENTAS

Para desarrollar el análisis por medio de los dos enfoques mencionados anteriormente, se utilizan los siguientes recursos técnicos y computacionales:

- Software de programación y cálculo simbólico (PTC MathCad Prime), para el desarrollo de los Métodos Analíticos basados en la teoría clásica con formulación de Lagrange, respuesta modal e integración directa (principios de diferencia finita).
- Software de elementos finitos (SAP2000) para simular el sistema tridimensional completo bajo carga estática y dinámica.
- Modelos simplificados para representar la interacción dinámica suelo-estructura, a través de las funciones de impedancia dinámica.
- Análisis de variación de amplitud por variación de las características del suelo, para definir el tipo y las propiedades dinámicas del suelo, a fin determinar los parámetros de rigidez y amortiguamiento por medio de las funciones de impedancia en función del espesor del cimiento.
- Parámetros constantes como ser: datos de la máquina obtenidas del fabricante de la máquina (geometría general, frecuencia de excitación de la máquina, carga estáticas y dinámicas) y las propiedades del material del bloque de cimentación.

3.4 PROCEDIMIENTO PARA LA INVESTIGACIÓN

3.4.1 Condiciones de carga

Las cargas consideradas han sido tomadas del fabricante del equipo, específicamente de la corporación internacional Dongturbo Electric Company Ltd (DTEC), cuyos equipos presentan características muy similares a los utilizados en nuestro medio, como por ejemplo en las plantas de generación hidroeléctrica. Estas acciones han sido adoptadas para representar la interacción entre la máquina y la fundación. Las cargas utilizadas en los modelos corresponden a aquellas determinadas previamente a partir de los datos proporcionados por el fabricante e incluyen componentes estáticos y dinámicos.

Como caso de estudio, se adopta la máquina QDRA70, cuya disposición general y algunos datos técnicos relevantes se presentan en la **Figura 3.1**. La turbina a gas QDRA70, que adopta la turbina de gas SGT200 de Siemens, posee las características de un diseño simple, operación confiable, menos emisiones y excelente desempeño.

QDRA70 Technical data

Power generation	12.90MW
Combustible	Gas natural
Frequency	50 / 60Hz
Electrical efficiency	34.8%
Heating speed	10.355MJ / KWh
Turbine speed	2250 - 9500 rpm
Compressor pressure ratio	16.8:1
Exhaust gas flow/temperature	39.4kg/s, 555°C
NOx emissions (with DLE, corrected to 15% dry O2)	< 25ppmV

QDRA70 heat-electricity cogeneration unit

QDRA70 gas turbine generator set adopting Siemens SGT200 gas turbine has the characteristics of simple design, reliable operation, less emission and excellent performance. It is capable of burning liquid fuel and gas fuel of different types. The modular integrated design concept is adopted in the generator set. The modules are assembled as an integrated unit and installed on a standard base after pre-assembly and factory testing, which is very convenient for transportation, installation and maintenance in the field. During industrial power generation, the heat recovery boiler can reuse the heat in the high-temperature exhaust of the gas turbine, making the whole comprehensive thermal efficiency up to 85%.

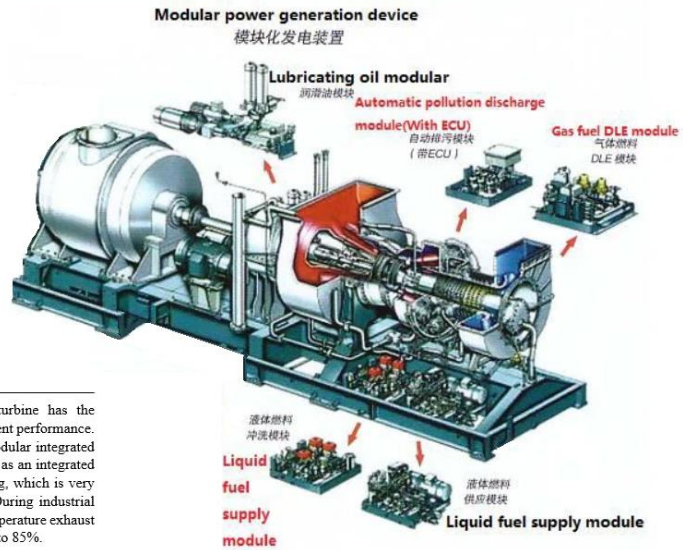


Figura 3.1. Esquema de la máquina QDRA70 y algunos datos técnicos

Fuente: Elaboración propia, adaptado de DTEC

Para efectos del análisis, se emplearán las cargas dinámicas equivalentes asociadas a la frecuencia crítica de falla del equipo, $\omega = 450$ rpm. Estas cargas se aplicarán como fuerzas armónicas concentradas en los puntos correspondientes al eje del rotor de la máquina, sobre la geometría en planta de la fundación, tal como se detalla en el capítulo siguiente.

Las cargas estáticas, correspondientes al peso propio del equipo, serán incorporadas como condiciones iniciales en el modelo. Las cargas dinámicas se introducirán mediante funciones senoidales, con amplitud y fase definidas, a fin de representar la excitación rotacional del sistema. El procedimiento de implementación de las cargas considera:

- Las fuerzas dinámicas aplicadas en las direcciones horizontal y vertical.
- La asignación de cada componente de carga estática proveniente de la turbina y el generador en las coordenadas específicas de los pernos de anclaje, respetando la distribución real de masas.

3.4.2 Modelos constitutivos

En base a la distribución de la geometría en planta y los requerimientos técnicos de la máquina, se ha procedido a definir la geometría de la fundación, donde el cuerpo de

hormigón se modela utilizando un modelo elástico lineal. El espesor de la fundación se ajustará de manera iterativa durante el proceso de análisis.

Para la caracterización del suelo, se utilizó el estudio geofísico realizado por la empresa INCOTEC SRL, que ha llevado a cabo estudios similares en proyectos termoeléctricos en diversas regiones de Santa Cruz. Los resultados obtenidos indican que, en general, los suelos de estas áreas son predominantemente granulares y cohesivos. En este estudio, se seleccionó el suelo cohesivo, considerado el más crítico para el análisis dinámico.

La caracterización geotécnica identificó un suelo cohesivo (CL), sin presencia de nivel freático hasta los 8 metros de profundidad. Debido a su baja permeabilidad, se asumieron condiciones drenadas para el análisis. El perfil del suelo incluye tres capas hasta los 8 metros, predominantemente formadas por arcilla de baja plasticidad, cuyas propiedades de interés se detallan en la **Tabla 3.1**.

Tabla 3.1. Propiedades de tres capas de suelo homogéneo para el análisis dinámico

Capa	Profundidad [m]	q_{adm_neta} [kN/m ²]	γ_s [kN/m ³]	ν -	V_s [m/s]
Capa 1	0.00 - 2.50	129.92	18.40	0.40	170.16
Capa 2	2.50 - 5.50	133.06	18.60	0.40	179.77
Capa 3	5.50 - 8.00	139.22	19.20	0.40	190.13

Fuente: Elaboración propia, adaptado de INCOTEC SRL

De acuerdo con la tabla anterior, los valores de peso específico se encuentran dentro del rango reportado en la bibliografía para suelos cohesivos, es decir, entre 17 y 20 kN/m³. Asimismo, el coeficiente de Poisson adoptado resulta aceptable, ya que se encuentra dentro del intervalo sugerido para este tipo de material por Chowdhury y Dasgupta (2009b) y la ACI Committee 351 (2018), el cual varía entre 0.30 a 0.50. De la **Tabla 3.1** también se puede observar que las velocidades de onda de corte consideradas para el estudio corresponden a suelos cohesivos, según lo establecido por el Eurocódigo 8 (2004), como se muestra en la **Tabla 3.2**.

Tabla 3.2. Categorías de clases de suelo C y D según el Eurocódigo 8

Ground type	Description of stratigraphic profile	Parameters	
		v_s (m/s)	N_{SPT} (blows/30 cm)
C	Deep deposits of dense or medium dense sand, gravel or stiff clay with thickness from several tens to many hundreds of meters	180–360	15–50
D	Deposits of loose to medium cohesionless soil (with or without some soft cohesive layers), or of predominantly soft to firm cohesive soil	<180	<15

Fuente: Elaboración propia, adaptado del Eurocódigo 8 (2004)

Para el caso de estudio, se utilizó un promedio ponderado de las propiedades más relevantes, con el fin de obtener un conjunto representativo de las características del suelo. El módulo dinámico de corte es determinado a partir de la velocidad de onda de corte y la densidad, utilizando un modelo constitutivo elástico lineal adecuado para deformaciones pequeñas, especialmente en infraestructuras sometidas a carga dinámica cíclica.

Aunque no se especificó el grado de sobreconsolidación, se asumió un comportamiento compatible con suelos normalmente consolidados, asegurando consistencia entre los parámetros físicos, formulación matemática y condiciones de borde.

3.4.3 Procedimiento general de análisis y modelado

Considerando la teoría expuesta en el capítulo anterior, junto con las técnicas actuales para analizar y diseñar fundaciones para máquinas, se desarrollan metodologías que permiten incorporar los principales parámetros que intervienen en un sistema de fundación para máquina centrífuga.

Se emplean modelos matemáticos y numéricos para predecir posibles estados de resonancia mediante el análisis de las frecuencias y amplitudes del sistema, utilizando cuatro tipos de análisis dinámico: teoría clásica con formulación de Lagrange, respuesta modal, integración directa y el método de elementos finitos (MEF).

Una vez obtenidos los resultados para los cuatro métodos, el análisis se repite manteniendo el mismo enfoque, pero reduciendo el espesor de la fundación (véase **Figura 3.2**), con el fin de comparar los métodos y verificar si convergen hacia soluciones similares o si presentan diferencias significativas. Esta estrategia permite evaluar la sensibilidad de cada método ante modificaciones geométricas que afectan la masa del sistema y la rigidez del suelo de soporte, representadas mediante funciones de impedancia dinámica, manteniéndose constantes todos los demás parámetros del modelo.

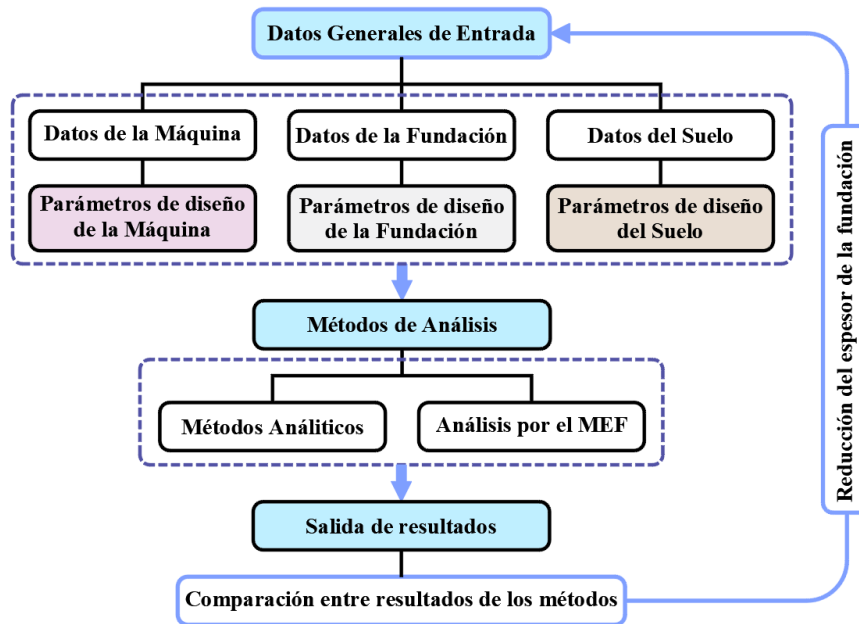


Figura 3.2. Pasos para el análisis comparativo de una fundación de máquina

Fuente: Elaboración Propia

En las siguientes secciones, se presentan de forma resumida las metodologías de análisis aplicadas al sistema de fundación para la máquina rotativa (turbina a gas), tanto para los métodos analíticos como para el MEF, este último modelado con el programa SAP2000. Cabe señalar que dichas metodologías han sido adaptadas por el autor a partir de la revisión bibliográfica realizada, incorporando modificaciones específicas en función de la experiencia de estudio. En particular, para la representación del suelo en los métodos analíticos y de elementos finitos, se emplean funciones de impedancia dinámica propuestas por Veletsos y Verbić (1973), en lugar de los enfoques tradicionales

desarrollados por Barkan (1962), Richart y Lysmer (1970). La elección del primer enfoque se justifica en el subapartado correspondiente a Modelos Simplificados (resortes y amortiguamientos), con el objetivo de lograr una caracterización más realista del comportamiento dinámico suelo-estructura.

3.5 METODOLOGÍA DE ANÁLISIS PARA MÉTODOS ANALÍTICOS

3.5.1 Fundamento del sistema físico y esquema general de dimensionamiento

El sistema completo es modelado y analizado matemáticamente como una fundación poco profunda considerada como un cuerpo rígido que descansa sobre un semiespacio elástico, que es el suelo, donde la máquina rotativa genera fuerzas dinámicas en planos perpendiculares al eje de rotación (Shaft del equipo), siendo dicho eje unido a los soportes de la fundación. El sistema vibra en los seis grados de libertad (6 GDL) y por tanto requiere el cálculo de las frecuencias y amplitudes respectivas en estos 6 GDL.

La aplicación de estos métodos de análisis para la evaluación de las frecuencias naturales y amplitudes es común para todos los tipos de máquinas rotativas o centrifugas, independientemente de su velocidad de operación.

El dimensionamiento de un sistema de fundación para máquina, mediante un análisis dinámico, podrá darse de acuerdo al esquema mostrado en la **Figura 3.3**, siendo que en esta etapa se da a entender lo siguiente:

- Los datos de la máquina se convierten en los Parámetros de Diseño de la Máquina en concordancia con las aclaraciones hechas en la sección 2.5.
- Los datos de la fundación se convierten en los Parámetros de Diseño de la Fundación de acuerdo a lo descrito en la sección 2.6.
- Los datos del suelo en sitio se convierten en los Parámetros de Diseño del Suelo debidamente representada y de acuerdo a lo expuesto en la sección 2.7.

Los detalles para la simulación numérica del sistema de fundación serán abordados en la sección correspondiente a la **Metodología de Modelado para el MEF**.

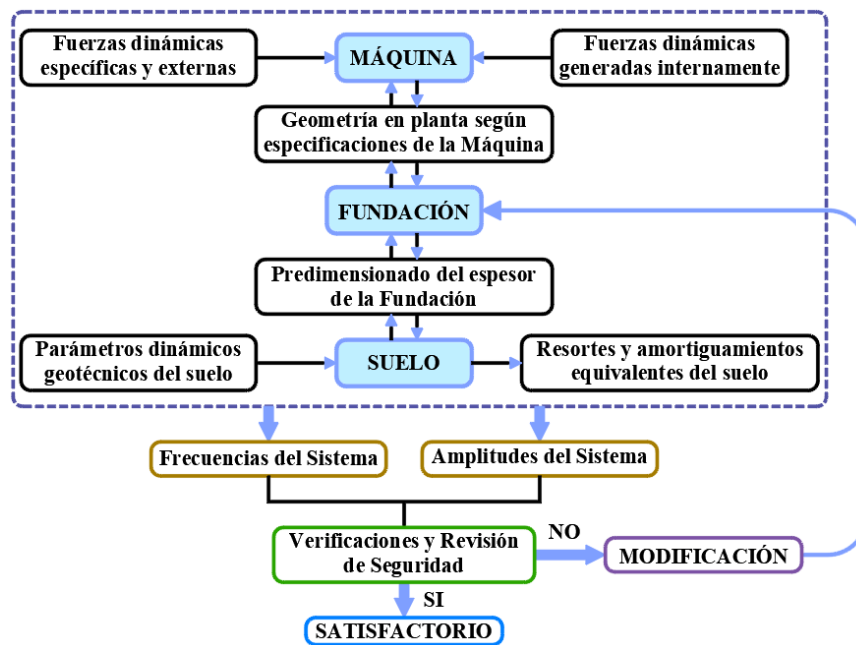


Figura 3.3. Pasos de dimensionamiento de una fundación para máquina

Fuente: Elaboración Propia

3.5.2 Dimensionado de la fundación mediante análisis dinámico

El modelo matemático de un sistema de fundación tipo bloque o combinado, puede ser representado tal como se muestra en la **Figura 3.4**.

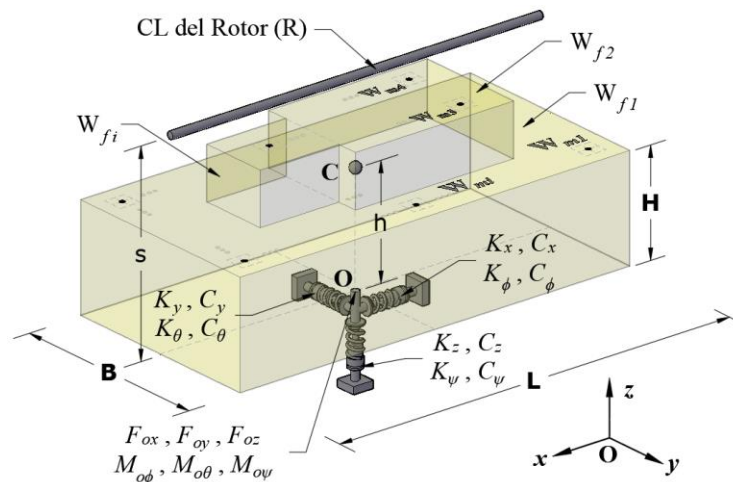


Figura 3.4. Modelo matemático de una fundación de bloque combinado genérico

Fuente: Elaboración Propia

De la figura anterior el punto **O** (centro de rigidez) representa el centro de gravedad (CG) del área de la base de la fundación en contacto con el suelo, el punto **C** es el centro de gravedad del sistema (máquina + fundación) y la línea **R** representa el centro de línea o eje del rotor de la máquina centrífuga. A continuación, se resumen las demás variables y los datos necesarios para llevar a cabo el análisis dinámico:

Masa, pesos y ubicación de puntos en el sistema de fundación:

Masa total de la máquina más la fundación:	m
Pesos de los componentes de la máquina:	W_{mi}
Pesos de los componentes de la fundación:	W_{fi}
Altura del Centroide General C a partir de O :	h
Altura del Shaft de la máquina R a partir de O :	s

Momentos de inercia de masa (máquina + fundación) en el centroide C:

Momento de inercia de masa alrededor del eje x :	I_{mcx}
Momento de inercia de masa alrededor del eje y :	I_{mcy}
Momento de inercia de masa alrededor del eje z :	I_{mcz}

Momentos de inercia de masa (máquina + fundación) en el centro de rigidez O:

Momento de inercia de masa alrededor del eje x :	I_{mox}
Momento de inercia de masa alrededor del eje y :	I_{moy}
Momento de inercia de masa alrededor del eje z :	I_{moz}

Resortes y amortiguamientos equivalentes del suelo en el centro de rigidez O:

Resorte y amortiguamiento del suelo traslacional a lo largo del eje x :	K_x, C_x
Resorte y amortiguamiento del suelo traslacional a lo largo del eje y :	K_y, C_y
Resorte y amortiguamiento del suelo traslacional a lo largo del eje z :	K_z, C_z
Resorte y amortiguamiento del suelo de rotación alrededor del eje x :	K_ϕ, C_ϕ
Resorte y amortiguamiento del suelo de rotación alrededor del eje y :	K_θ, C_θ
Resorte y amortiguamiento del suelo de rotación alrededor del eje z :	K_ψ, C_ψ

Frecuencias de operación de la máquina: $\omega, \omega_1, \omega_2$, etc.

Fuerzas dinámicas:

- Las fuerzas dinámicas que actúan ya sea en el eje del rotor o en cualquier otra ubicación, necesariamente deben ser transferidos al centro de rigidez **O** con sus signos correspondientes y en concordancia con el modelo matemático.
- Un sistema de fundación para máquina, puede tener varias fuerzas y momentos, así como frecuencias de excitación. Estas fuerzas y momentos ubicados en **O**, para los métodos analíticos serán:

Fuerzas en el punto **O** en las direcciones de los ejes x, y, z : F_{ox}, F_{oy}, F_{oz}

Momentos en el punto **O** alrededor de los ejes x, y, z : $M_{o\phi}, M_{o\theta}, M_{o\psi}$

3.5.2.1 Profundidad requerida de la fundación

Para el predimensionamiento de prueba, se pueden utilizar todos los criterios de los estándares internacionales. En este caso, se adopta una relación de pesos entre 2 y 4 para equipos centrífugos, comenzando con la verificación:

$$\frac{W_{ft}}{W_{mt}} \geq 2 \quad \text{Ec. (38)}$$

Donde:

W_{mt} : Peso total de la máquina

W_{ft} : Peso total de la fundación

A partir de los pesos componentes de la máquina, su peso total puede determinarse con:

$$W_{mt} = \sum_{i=1}^N W_{mi} \quad \text{Ec. (39)}$$

Donde:

N : Número de puntos de aplicación de los pesos que constituyen la máquina o equipo.

Para un caso general, la disposición de los puntos de aplicación de los pesos componentes de la máquina, se muestran en la **Figura 3.5**.

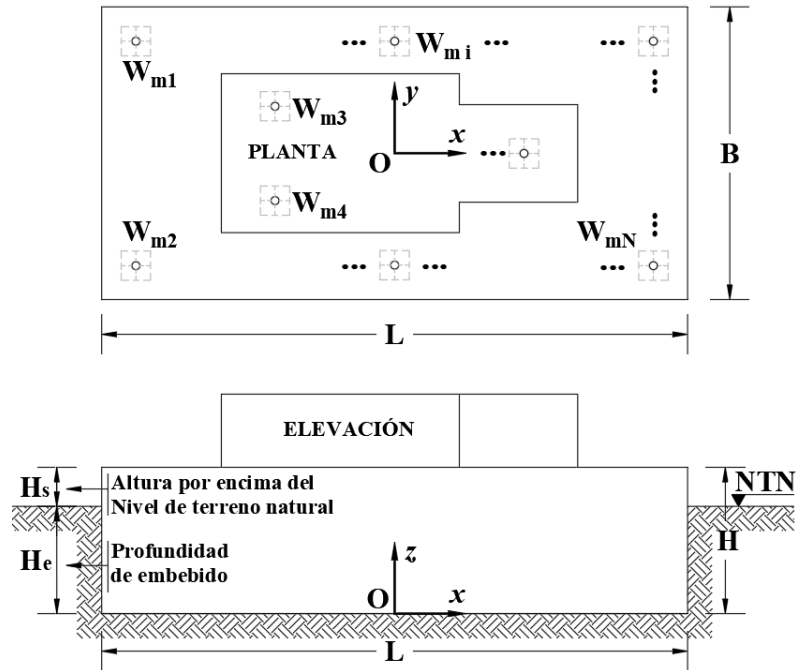


Figura 3.5. Distribución de pesos que conforman el peso total de la máquina

Fuente: Elaboración Propia

En base a los esquemas mostrados en las figuras (**Figura 3.4** y **Figura 3.5**), el peso total de un bloque de fundación genérica, también podrá determinarse a partir de:

$$w_{ft} = \sum_{i=1}^n w_{fi} \quad \text{Ec. (40)}$$

Donde:

n : Número de elementos componentes de la fundación.

3.5.2.2 Verificación del margen disponible para otras cargas

De acuerdo a la literatura, conociendo la capacidad portante neta admisible del suelo en la base de apoyo de la fundación, es posible estimar el margen disponible para otras cargas

(cargas no contempladas, cargas de emergencia, etc.). Este margen se considera aceptable si: $M_q > 30\%$.

$$M_q = \left(1 - \frac{q}{q_{adm}}\right) * 100\% \quad \text{Ec. (41)}$$

Siendo la capacidad admisible a H_e metros de profundidad:

$$q_{adm} = q_{adm(neta)} + \rho \cdot g \cdot H_e \quad \text{Ec. (42)}$$

Donde la presión de apoyo debido al peso total del sistema ($W = W_{mt} + W_{ft}$) será:

$$q = \frac{W}{B \cdot L} \quad \text{Ec. (43)}$$

3.5.2.3 Centroides y verificación de excentricidades

El centroide general del sistema estará definido por el punto **C**, respecto al punto **O**.

Coordenadas de centroide de la máquina respecto al punto O:

$$x_{mo} = \frac{\sum W_{mi} x_{mi}}{W_{mt}} ; y_{mo} = \frac{\sum W_{mi} y_{mi}}{W_{mt}} ; z_{mo} = \frac{\sum W_{mi} z_{mi}}{W_{mt}} \quad \text{Ec. (44)}$$

Dónde: x_{mi} , y_{mi} , z_{mi} y W_{mi} son las coordenadas y los pesos de los distintos componentes, que conforman el peso total de la máquina.

Coordenadas de centroide de la fundación respecto al punto O:

$$x_{fo} = \frac{\sum W_{fi} x_{fi}}{W_{ft}} ; y_{fo} = \frac{\sum W_{fi} y_{fi}}{W_{ft}} ; z_{fo} = \frac{\sum W_{fi} z_{fi}}{W_{ft}} \quad \text{Ec. (45)}$$

Siendo: x_{fi} , y_{fi} , z_{fi} y W_{fi} , las coordenadas y los pesos componentes de la fundación.

Coordenadas centroide del sistema (máquina + fundación) respecto al punto O:

$$x_{co} = \frac{\sum (W_{mi} x_{mi} + W_{fi} x_{fi})}{\sum (W_{mi} + W_{fi})} = \frac{W_{mt} x_{mo} + W_{ft} x_{fo}}{W} \quad \text{Ec. (46)}$$

$$y_{co} = \frac{\sum (W_{mi} y_{mi} + W_{fi} y_{fi})}{\sum (W_{mi} + W_{fi})} = \frac{W_{mt} y_{mo} + W_{ft} y_{fo}}{W} \quad \text{Ec. (47)}$$

$$z_{co} = \frac{\sum (W_{mi} z_{mi} + W_{fi} z_{fi})}{\sum (W_{mi} + W_{fi})} = \frac{W_{mt} z_{mo} + W_{ft} z_{fo}}{W} \quad \text{Ec. (48)}$$

Verificación de excentricidades en el Plano xy:

$$e_x = \left| \frac{x_{co}}{L} \right| * 100\% \quad ; \quad e_y = \left| \frac{y_{co}}{B} \right| * 100\% \quad \text{Ec. (49)}$$

Ambas excentricidades deben estar en un rango aceptable $< 5\%$.

3.5.2.4 Momentos de inercia de masa

La distribución de pesos componentes de la máquina, así como de los elementos componentes de la fundación mostradas en la **Figura 3.5**, requiere el cálculo de los momentos de inercia de masa.

Momentos de Inercia de masa de la máquina alrededor del Punto O:

La masa total de la máquina se obtiene de:

$$m_{mt} = \frac{W_{mt}}{g} \quad \text{Ec. (50)}$$

Momento de Inercia de masa de la máquina en el punto O (Eje x):

$$I_{mox_m} = \sum_{i=1}^N \frac{W_{mi}}{g} (y_{mi}^2 + z_{mi}^2) \quad \text{Ec. (51)}$$

Momento de Inercia de Masa de la Máquina en el punto O (Eje y):

$$I_{moy_m} = \sum_{i=1}^N \frac{W_{mi}}{g} (x_{mi}^2 + z_{mi}^2) \quad \text{Ec. (52)}$$

Momento de Inercia de Masa de la Máquina en el punto O (Eje z):

$$I_{moz_m} = \sum_{i=1}^N \frac{W_{mi}}{g} (x_{mi}^2 + y_{mi}^2) \quad \text{Ec. (53)}$$

Momentos de Inercia de masa de la fundación alrededor del Punto O:

La masa total de la fundación se obtiene de:

$$m_{ft} = \frac{W_{ft}}{g} \quad \text{Ec. (54)}$$

Momento de Inercia de masa de la fundación en el punto O (Eje x):

$$I_{mox_f} = \sum_{i=1}^n \frac{m_{fi}}{12} (L_{yi}^2 + L_{zi}^2) + \sum_{i=1}^n m_{fi} (y_{fi}^2 + z_{fi}^2) \quad \text{Ec. (55)}$$

Momento de Inercia de masa de la fundación en el punto O (Eje y):

$$I_{moy_f} = \sum_{i=1}^n \frac{m_{fi}}{12} (L_{xi}^2 + L_{zi}^2) + \sum_{i=1}^n m_{fi} (x_{fi}^2 + z_{fi}^2) \quad \text{Ec. (56)}$$

Momento de Inercia de Masa de la fundación en el punto O (Eje z):

$$I_{moz_f} = \sum_{i=1}^n \frac{m_{fi}}{12} (L_{xi}^2 + L_{yi}^2) + \sum_{i=1}^n m_{fi} (x_{fi}^2 + y_{fi}^2) \quad \text{Ec. (57)}$$

Aquí: m_{fi} y L_{xi} , L_{yi} , L_{zi} , son las masas y dimensiones de los elementos componentes de la fundación, en dirección de los ejes correspondientes al sistema de referencia.

Momentos de Inercia de masa del sistema alrededor del Punto O:

Momento de Inercia de masa del sistema en el punto O (Eje x):

$$I_{mox} = I_{mox_m} + I_{mox_f} \quad \text{Ec. (58)}$$

Momento de Inercia de masa del sistema en el punto O (Eje y):

$$I_{moy} = I_{moy_m} + I_{moy_f} \quad \text{Ec. (59)}$$

Momento de Inercia de masa del sistema en el punto O (Eje z):

$$I_{moz} = I_{moz_m} + I_{moz_f} \quad \text{Ec. (60)}$$

Momentos de Inercia de masa del sistema respecto al centroide en el Punto C:

La masa total del sistema (máquina + fundación) se obtendrá de:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_{mt} + \mathbf{m}_{ft} \quad \text{Ec. (61)}$$

Momento de Inercia de masa del sistema en el punto C (Eje x):

$$I_{mcx} = I_{mox} - \mathbf{m} (\mathbf{y}_{co}^2 + \mathbf{z}_{co}^2) \quad \text{Ec. (62)}$$

Momento de Inercia de masa del sistema en el punto C (Eje y):

$$I_{mcy} = I_{moy} - \mathbf{m} (\mathbf{x}_{co}^2 + \mathbf{z}_{co}^2) \quad \text{Ec. (63)}$$

Momento de Inercia de masa del sistema en el punto C (Eje z):

$$I_{mcz} = I_{moz} - \mathbf{m} (\mathbf{x}_{co}^2 + \mathbf{y}_{co}^2) \quad \text{Ec. (64)}$$

3.5.2.5 Modelos simplificados (resortes y amortiguamientos)

A continuación, se presentan las formulaciones de dos modelos simplificados para determinar los resortes y amortiguamientos equivalentes del suelo, aplicables a los 6 GDL de un modelo matemático que representará al sistema de fundación de la máquina.

MODELO 1: Resortes y amortiguamientos (Impedancias Estáticas)

Los problemas de dinámica de suelos e IDSE se abordan con matemáticas de dominio real o complejo (ACI Committee 351, 2018). En el primero, se emplean modelos de resortes y amortiguamientos equivalentes, como los propuestos por Richart y Whitman (1967), Richart y Lysmer (1970) y Whitman (1972), donde dichos resortes y amortiguamientos se representan como constantes, independientes de la frecuencia de excitación.

En el modelo de Richart y Lysmer (1970), la fundación se considera como una masa aglomerada sobre un suelo modelado con resortes y amortiguamientos cuyas propiedades son constantes. Estos parámetros, inicialmente para fundaciones circulares, se ajustan para cimientos rectangulares usando un radio equivalente.

Las tablas (**Tabla 3.3** y **Tabla 3.4**), muestran expresiones para evaluar los resortes y amortiguamientos en los 6 GDL propuestos por Richart y Lysmer (1970), cuyas variables involucradas son:

G : Módulo dinámico de corte del suelo obtenido por $G = \rho \cdot V_s^2$

ρ : Densidad de masa del suelo

V_s : Velocidad de onda de corte del suelo, obtenida de las pruebas de campo

ν : Coeficiente de Poisson del suelo

B : Ancho de la fundación

L : Longitud de la fundación

m : Masa del sistema (máquina + fundación)

I_{mo} : Momento de inercia de masa del sistema (máquina + fundación) respecto al centro de rigidez O y alrededor de los ejes correspondientes (x, y, z)

r : Radios equivalentes en los modos de vibración correspondientes

b : Relaciones de masa en los modos de vibración correspondientes

K : Resorte equivalente del suelo en los modos de vibración respectivos

C : Amortiguamiento equivalente del suelo en los modos de vibración respectivos

ζ : Relación de amortiguamiento total del suelo en los modos de vibración respectivos

D_i : Relación de amortiguamiento interno del suelo para todos los modos de vibración

El sistema de referencia en coordenadas globales y locales para una fundación genérica, con la ubicación de resortes y amortiguamientos del suelo, se muestran en la **Figura 3.6**.

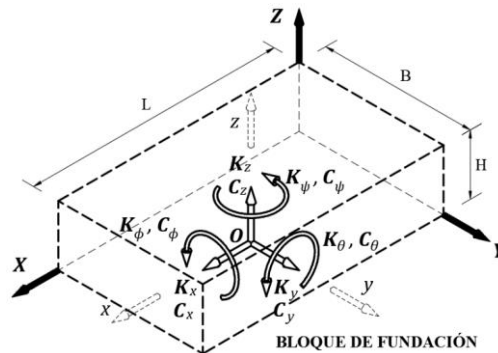


Figura 3.6. Sistema de fundación con rigideces equivalentes del suelo

Fuente: Elaboración propia

Tabla 3.3. Expresiones de resortes del suelo por Richart y Lysmer (1970)

Dirección	Radio Equivalente	Resorte Equivalente	Observaciones
Vertical	$r_0 = \sqrt{\frac{B \cdot L}{\pi}}$	$K'_z = \frac{4 \cdot G \cdot r_0}{1 - \nu}$	Rigidez al desplazamiento vertical en dirección del eje z
Horizontal	$r_0 = \sqrt{\frac{B \cdot L}{\pi}}$	$K'_x = K'_y = \frac{32 \cdot (1 - \nu) \cdot G \cdot r_0}{7 - 8 \cdot \nu}$	Rigidez al desplazamiento horizontal en dirección de los ejes x o y
Balanceo	$r_\phi = \sqrt[4]{\frac{L \cdot B^3}{3 \cdot \pi}}$	$K'_\phi = \frac{8 \cdot G \cdot r_\phi^3}{3 \cdot (1 - \nu)}$	Rigidez al desplazamiento angular de balanceo alrededor del eje x
Balanceo	$r_\theta = \sqrt[4]{\frac{B \cdot L^3}{3 \cdot \pi}}$	$K'_\theta = \frac{8 \cdot G \cdot r_\theta^3}{3 \cdot (1 - \nu)}$	Rigidez al desplazamiento angular de balanceo alrededor del eje y
Torsión	$r_\psi = \sqrt[4]{\frac{B \cdot L \cdot (B^2 + L^2)}{6 \cdot \pi}}$	$K'_\psi = \frac{16 \cdot G \cdot r_\psi^3}{3}$	Rigidez al desplazamiento angular de torsión alrededor del eje z

Fuente: Modificado de Richart y Lysmer (1970)

Tabla 3.4. Expresiones de amortiguamiento del suelo por Richart y Lysmer (1970)

Dirección	Relaciones de masa	Relación de amortiguamiento y Amortiguamiento total equivalente	Observaciones
Vertical	$b_z = \frac{(1 - \nu)}{4} \cdot \frac{m}{\rho \cdot r_0^3}$	$\zeta_z = \frac{0.425}{\sqrt{b_z}} + D_i$ $C'_z = 2 \cdot \zeta_z \cdot \sqrt{K'_z \cdot m}$	Amortiguamiento de desplazamiento vertical en dirección del eje z
Horizontal	$b_x = b_y = \frac{(7 - 8 \cdot \nu)}{32 \cdot (1 - \nu)} \cdot \frac{m}{\rho \cdot r_0^3}$	$\zeta_{x \text{ ó } y} = \frac{0.288}{\sqrt{b_{x \text{ ó } y}}} + D_i$ $C'_{x \text{ ó } y} = 2 \cdot \zeta_{x \text{ ó } y} \cdot \sqrt{K'_{x \text{ ó } y} \cdot m}$	Amortiguamiento de desplazamiento horizontal en dirección de los ejes x o y
Balanceo	$b_\phi = \frac{3 \cdot (1 - \nu)}{8} \cdot \frac{I_{moz}}{\rho \cdot r_\phi^5}$	$\zeta_\phi = \frac{0.15}{(1 + b_\phi) \cdot \sqrt{b_\phi}} + D_i$ $C'_\phi = 2 \cdot \zeta_\phi \cdot \sqrt{K'_\phi \cdot I_{moz}}$	Amortiguamiento de desplazamiento angular de balanceo alrededor del eje x
Balanceo	$b_\theta = \frac{3 \cdot (1 - \nu)}{8} \cdot \frac{I_{moy}}{\rho \cdot r_\theta^5}$	$\zeta_\theta = \frac{0.15}{(1 + b_\theta) \cdot \sqrt{b_\theta}} + D_i$ $C'_\theta = 2 \cdot \zeta_\theta \cdot \sqrt{K'_\theta \cdot I_{moy}}$	Amortiguamiento de desplazamiento angular de balanceo alrededor del eje y
Torsión	$b_\psi = \frac{I_{moz}}{\rho \cdot r_\psi^5}$	$\zeta_\psi = \frac{0.50}{(1 + 2 \cdot b_\psi)} + D_i$ $C'_\psi = 2 \cdot \zeta_\psi \cdot \sqrt{K'_\psi \cdot I_{moz}}$	Amortiguamiento de desplazamiento angular de torsión alrededor del eje z

Fuente: Modificado de Richart y Lysmer (1970)

Las fórmulas de las tablas anteriores, representan los resortes y amortiguamientos sin considerar el efecto de embebido de la fundación, por lo que para tomar en cuenta el efecto de embebido, Whitman (1972), propuso en base a experimentos de campo, los siguientes factores mostrados en las tablas (**Tabla 3.5 a Tabla 3.6**), que al multiplicarlos por los valores de los resortes y amortiguamientos equivalentes de Richart y Lysmer (1970), se obtienen los resortes y amortiguamientos finales de la **Figura 3.6** mostrada anteriormente.

Tabla 3.5. Factores de embebido para resortes del suelo

Dirección	Factor de Resorte	Observaciones
Vertical	$\eta_z = 1 + 0.60 \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{H_e}{r_0}$	Factor de rigidez al desplazamiento vertical en dirección del eje z
Horizontal	$\eta_x = \eta_y = 1 + 0.55 \cdot (2 - \nu) \cdot \frac{H_e}{r_0}$	Factor de rigidez al desplazamiento horizontal en dirección de los ejes x o y
Balanceo	$\eta_\phi = 1 + 1.20 \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{H_e}{r_\phi} + 0.20 \cdot (2 - \nu) \cdot \left(\frac{H_e}{r_\phi}\right)^3$	Factor de rigidez al desplazamiento angular de balanceo alrededor del eje x
Balanceo	$\eta_\theta = 1 + 1.20 \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{H_e}{r_\theta} + 0.20 \cdot (2 - \nu) \cdot \left(\frac{H_e}{r_\theta}\right)^3$	Factor de rigidez al desplazamiento angular de balanceo alrededor del eje y
Torsión	Ninguno disponible	

Fuente: Modificado de Whitman (1972)

Tabla 3.6. Factores de embebido para amortiguamiento del suelo

Dirección	Factor de Amortiguamiento	Observaciones
Vertical	$\alpha_z = \frac{1 + 1.90 \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{H_e}{r_0}}{\sqrt{\eta_z}}$	Factor amortiguamiento de desplazamiento vertical en dirección del eje z
Horizontal	$\alpha_x = \alpha_y = \frac{1 + 1.90 \cdot (2 - \nu) \cdot \frac{H_e}{r_0}}{\sqrt{\eta_x \text{ ó } y}}$	Factor amortiguamiento de desplazamiento horizontal en dirección de los ejes x o y
Balanceo	$\alpha_\phi = \frac{1 + 0.70 \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{H_e}{r_\phi} + 0.60 \cdot (2 - \nu) \cdot \left(\frac{H_e}{r_\phi}\right)^3}{\sqrt{\eta_\phi}}$	Factor amortiguamiento de desplazamiento angular de balanceo alrededor del eje x
Balanceo	$\alpha_\theta = \frac{1 + 0.70 \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{H_e}{r_\theta} + 0.60 \cdot (2 - \nu) \cdot \left(\frac{H_e}{r_\theta}\right)^3}{\sqrt{\eta_\theta}}$	Factor amortiguamiento de desplazamiento angular de balanceo alrededor del eje y
Torsión	Ninguno disponible	

Fuente: Modificado de Whitman (1972)

Donde:

H_e : Profundidad de embebido o empotramiento de la fundación en el suelo.

Con lo anterior los resortes y amortiguamientos equivalentes del suelo, teniendo en cuenta el efecto de embebido de la fundación, pueden ser expresadas como:

$$K_z = \eta_z \cdot K'_z \quad \text{Ec. (65)}$$

$$C_z = \alpha_z \cdot C'_z \quad \text{Ec. (66)}$$

$$K_x = \eta_x \cdot K'_x \quad ; \quad K_y = \eta_y \cdot K'_y \quad \text{Ec. (67)}$$

$$C_x = \alpha_x \cdot C'_x \quad ; \quad C_y = \alpha_y \cdot C'_y \quad \text{Ec. (68)}$$

$$K_\phi = \eta_\phi \cdot K'_\phi \quad ; \quad K_\theta = \eta_\theta \cdot K'_\theta \quad \text{Ec. (69)}$$

$$C_\phi = \alpha_\phi \cdot C'_\phi \quad ; \quad C_\theta = \alpha_\theta \cdot C'_\theta \quad \text{Ec. (70)}$$

$$K_\psi = K'_\psi \quad \text{Ec. (71)}$$

$$C_\psi = C'_\psi \quad \text{Ec. (72)}$$

MODELO 2: Resortes y amortiguamientos (Impedancias Dinámicas)

Veletsos y Wei (1971); Veletsos y Verbič (1973), han desarrollado ecuaciones apropiadas que representan la impedancia al movimiento que ofrecen las condiciones uniformes del suelo. Según los códigos ACI Committee 351 (2018) y American Society of Civil Engineers (2018), estas formulaciones se basan en la suposición de un semiespacio uniforme viscoelástico y el movimiento relacionado de una base rígida o flexible en este semiespacio. Los movimientos pueden ser de traslación o de rotación y en los 6 GDL.

El modelo propuesto por Veletsos y Verbič (1973), según la ACI Committee 351 (2018) resultan de gran utilidad para poder desarrollar estudios paramétricos, verificar resultados computarizados complicados, pues al disponerse de formulaciones para resortes y amortiguamientos dependientes de la frecuencia de excitación (Impedancias Dinámicas), estos permiten cubrir un amplio rango de frecuencias, así como tomar en cuenta el efecto de embebido de la fundación en diferentes capas de suelo, además de que la implementación por computadora brinda una eficiencia aceptable.

La impedancia dinámica al ser de dominio complejo se hizo más fácil de describir matemáticamente su solución, por lo cual fue aplicado a los modelos de impedancia de Veletsos y Verbič (1973). Mayores detalles sobre la generalización del concepto de impedancia dinámica se pueden encontrar en Wolf y Song (1996) y Lysmer et al. (2000).

En las siguientes tablas, se muestran las expresiones para las impedancias dinámicas propuestas por Veletsos y Verbič, donde estas se representan por medio de dos soluciones, la 1^{era} solución es en la base de la fundación sin considerar el embebido de la fundación (sin y con efecto de amortiguamiento interno del suelo) y la 2^{da} solución es considerando el embebido (suelo lateral) de la fundación (sin y con efecto de amortiguamiento interno del suelo), cuya solución completa se obtiene por la suma de ambas soluciones.

Tabla 3.7. Radios equivalentes y frecuencias adimensionales

Dirección	Radios equivalentes	Frecuencias adimensionales	Observaciones
Vertical	$r_0 = \sqrt{\frac{B \cdot L}{\pi}}$	$\alpha_0 = r_0 \cdot \frac{\omega}{V_s}$	Parámetros en dirección del eje z
Horizontal	$r_0 = \sqrt{\frac{B \cdot L}{\pi}}$	$\alpha_0 = r_0 \cdot \frac{\omega}{V_s}$	Parámetros en dirección de los ejes x o y
Balanceo	$r_\phi = \sqrt[4]{\frac{L \cdot B^3}{3 \cdot \pi}}$	$\alpha_\phi = r_\phi \cdot \frac{\omega}{V_s}$	Parámetros en dirección angular de balanceo alrededor del eje x
Balanceo	$r_\theta = \sqrt[4]{\frac{B \cdot L^3}{3 \cdot \pi}}$	$\alpha_\theta = r_\theta \cdot \frac{\omega}{V_s}$	Parámetros en dirección angular de balanceo alrededor del eje y
Torsión	$r_\psi = \sqrt[4]{\frac{B \cdot L \cdot (B^2 + L^2)}{6 \cdot \pi}}$	$\alpha_\psi = r_\psi \cdot \frac{\omega}{V_s}$	Parámetros en dirección angular de torsión alrededor del eje z

Fuente: Modificado de Veletsos y Verbič (1973)

Las variables de entrada que se observan en la **Tabla 3.7** y en las siguientes tablas han sido descritas en el **MODELO 1**, siendo que, además:

ω : Frecuencia angular del equipo o frecuencia de operación de la máquina.

Tabla 3.8. Funciones de Impedancias traslacionales y rotacionales (Solución 1)

Solución 1. Funciones de Impedancia sin considerar el embebido de la fundación	
Impedancia Traslacional Vertical: $Z^1_v = \frac{4 \cdot G \cdot r_0}{1 - \nu} [(1 - X_v - \gamma_3 \cdot \alpha_0^2) + i \cdot \alpha_0 \cdot (\gamma_4 + \Psi_v)]$	
Sin considerar el amortiguamiento interno del material de apoyo	Considerando el amortiguamiento interno del material de apoyo
$X_v = \frac{\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \alpha_0)^2}{1 + (\gamma_2 \cdot \alpha_0)^2} \quad ; \quad \Psi_v = \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot (\gamma_2 \cdot \alpha_0)^2}{1 + (\gamma_2 \cdot \alpha_0)^2}$	$K^1_v = Z^1_{v_Re} - 2 \cdot D_i \cdot C^1_{v_i} \cdot \omega$ $C^1_v = C^1_{v_i} + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z^1_{v_Re}}{\omega}$
$Z^1_{v_Re} = \frac{4 \cdot G \cdot r_0}{1 - \nu} (1 - X_v - \gamma_3 \cdot \alpha_0^2) \quad ; \quad Z^1_{v_Im} = \frac{4 \cdot G \cdot r_0}{1 - \nu} \cdot \alpha_0 \cdot (\gamma_4 + \Psi_v)$ $C^1_{v_i} = \frac{Z^1_{v_Im}}{\omega}$	
Impedancia Traslacional Horizontal: $Z^1_h = \frac{8 \cdot G \cdot r_0}{2 - \nu} (1 + i \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_1)$	
Sin considerar el amortiguamiento interno del material de apoyo	Considerando el amortiguamiento interno del material de apoyo
$Z^1_{h_Re} = \frac{8 \cdot G \cdot r_0}{2 - \nu} \quad ; \quad Z^1_{h_Im} = \frac{8 \cdot G \cdot r_0}{2 - \nu} \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_1$ $C^1_{h_i} = \frac{Z^1_{h_Im}}{\omega}$	$K^1_h = Z^1_{h_Re} - 2 \cdot D_i \cdot C^1_{h_i} \cdot \omega$ $C^1_h = C^1_{h_i} + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z^1_{h_Re}}{\omega}$
Impedancia Rotacional de Balanceo ϕ: $Z^1_\phi = \frac{8 \cdot G \cdot r_\phi^3}{3 \cdot (1 - \nu)} [(1 - X_\phi - \beta_3 \cdot \alpha_\phi^2) + i \cdot \alpha_\phi \cdot \Psi_\phi]$	
Sin considerar el amortiguamiento interno del material de apoyo	Considerando el amortiguamiento interno del material de apoyo
$X_\phi = \frac{\beta_1 \cdot (\beta_2 \cdot \alpha_\phi)^2}{1 + (\beta_2 \cdot \alpha_\phi)^2} \quad ; \quad \Psi_\phi = \frac{\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\beta_2 \cdot \alpha_\phi)^2}{1 + (\beta_2 \cdot \alpha_\phi)^2}$	$K^1_\phi = Z^1_{\phi_Re} - 2 \cdot D_i \cdot C^1_{\phi_i} \cdot \omega$ $C^1_\phi = C^1_{\phi_i} + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z^1_{\phi_Re}}{\omega}$
$Z^1_{\phi_Re} = \frac{8 \cdot G \cdot r_\phi^3}{3 \cdot (1 - \nu)} (1 - X_\phi - \beta_3 \cdot \alpha_\phi^2) \quad ; \quad Z^1_{\phi_Im} = \frac{8 \cdot G \cdot r_\phi^3}{3 \cdot (1 - \nu)} \cdot \alpha_\phi \cdot \Psi_\phi$ $C^1_{\phi_i} = \frac{Z^1_{\phi_Im}}{\omega}$	
Impedancia Rotacional de Balanceo θ: $Z^1_\theta = \frac{8 \cdot G \cdot r_\theta^3}{3 \cdot (1 - \nu)} [(1 - X_\theta - \beta_3 \cdot \alpha_\theta^2) + i \cdot \alpha_\theta \cdot \Psi_\theta]$	
Sin considerar el amortiguamiento interno del material de apoyo	Considerando el amortiguamiento interno del material de apoyo
$X_\theta = \frac{\beta_1 \cdot (\beta_2 \cdot \alpha_\theta)^2}{1 + (\beta_2 \cdot \alpha_\theta)^2} \quad ; \quad \Psi_\theta = \frac{\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\beta_2 \cdot \alpha_\theta)^2}{1 + (\beta_2 \cdot \alpha_\theta)^2}$	$K^1_\theta = Z^1_{\theta_Re} - 2 \cdot D_i \cdot C^1_{\theta_i} \cdot \omega$ $C^1_\theta = C^1_{\theta_i} + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z^1_{\theta_Re}}{\omega}$
$Z^1_{\theta_Re} = \frac{8 \cdot G \cdot r_\theta^3}{3 \cdot (1 - \nu)} (1 - X_\theta - \beta_3 \cdot \alpha_\theta^2) \quad ; \quad Z^1_{\theta_Im} = \frac{8 \cdot G \cdot r_\theta^3}{3 \cdot (1 - \nu)} \cdot \alpha_\theta \cdot \Psi_\theta$ $C^1_{\theta_i} = \frac{Z^1_{\theta_Im}}{\omega}$	

Fuente: Modificado de Veletsos y Verbić (1973)

Tabla 3.9. Función de Impedancia rotacional de torsión (Solución 1)

Solución 1. Funciones de Impedancia sin considerar el embebido de la fundación	
Impedancia Rotacional de Torsión ψ:	$Z^1_{\psi} = \frac{16 \cdot G \cdot r_{\psi}^3}{3} [A + i \cdot \alpha_{\psi} \cdot B]$
Sin considerar el amortiguamiento interno del material de apoyo	Considerando el amortiguamiento interno del material de apoyo
$A = 1 - \frac{b_1 \cdot (b_2 \cdot \alpha_{\psi})^2}{1 + (b_2 \cdot \alpha_{\psi})^2}$; $B = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot (b_2 \cdot \alpha_{\psi})^2}{1 + (b_2 \cdot \alpha_{\psi})^2}$; $b_1 = 0.425$ $b_2 = 0.687$	$K^1_{\psi} = Z^1_{\psi_{Re}} - 2 \cdot D_i \cdot C^1_{\psi_{i}} \cdot \omega$
$Z^1_{\psi_{Re}} = \frac{16 \cdot G \cdot r_{\psi}^3}{3} \cdot A$; $Z^1_{\psi_{Im}} = \frac{16 \cdot G \cdot r_{\psi}^3}{3} \cdot \alpha_{\psi} \cdot B$ $C^1_{\psi_{i}} = \frac{Z^1_{\psi_{Im}}}{\omega}$	$C^1_{\psi} = C^1_{\psi_{i}} + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z^1_{\psi_{Re}}}{\omega}$

Fuente: Modificado de Veletsos y Verbič (1973)

Donde los factores de impedancias en función del coeficiente de Poisson se obtienen de:

Tabla 3.10. Factores de impedancias en función del coeficiente de Poisson ($D_i = 0$)

Factores	$\nu=0$	$\nu=0.33$	$\nu=0.45$	$\nu=0.50$
α_1	0.775	0.650	0.600	0.600
β_1	0.525	0.500	0.450	0.400
β_2	0.800	0.800	0.800	0.800
β_3	0.000	0.000	0.023	0.027
γ_1	0.250	0.350	0.103 *	0.000
γ_2	1.000	0.800	0.235 *	0.000
γ_3	0.000	0.000	0.120 *	0.170
γ_4	0.850	0.750	0.821 *	0.850

* Valores no disponibles, los cuales fueron obtenidos por interpolación

Fuente: Modificado de Veletsos (1971)

Se debe aclarar que los radios equivalentes, funcionan muy bien en fundaciones cuadradas y rectangulares con relaciones de aspecto $L/B \leq 2$, no obstante, según el código ACI Committee 351 (2018), hay poca diferencia entre usar formulaciones para una fundación circular o rectangular para los anteriores términos de rigidez, ya para relaciones $L/B > 3$, se consideran como cimentaciones largas, y por ende la suposición de una fundación de franja infinita será la más apropiada, pudiendo usarse gráficos de Dobry y Gazetas (1986).

Tabla 3.11. Funciones de Impedancias traslacionales y rotacionales (Solución 2)

Solución 2. Funciones de Impedancia considerando el embebido de la fundación	
Impedancia Traslacional Vertical: $Z_v^2 = G' \cdot H_e \cdot [S_{v1} + i \cdot \alpha'_0 \cdot S_{v2}]$	
Sin considerar el amortiguamiento interno del material de embebido	Considerando el amortiguamiento interno del material de embebido
S_{v1} ; S_{v2} Factores de impedancia obtenidos en función al tipo de suelo $Z_{v_Re}^2 = G' \cdot H_e \cdot S_{v1}$; $Z_{v_Im}^2 = G' \cdot H_e \cdot \alpha'_0 \cdot S_{v2}$ $C_{v_i}^2 = \frac{Z_{v_Im}^2}{\omega}$	$K_v^2 = Z_{v_Re}^2 - 2 \cdot D_i \cdot C_{v_i}^2 \cdot \omega$ $C_v^2 = C_{v_i}^2 + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z_{v_Re}^2}{\omega}$
Impedancia Traslacional Horizontal: $Z_h^2 = G' \cdot H_e \cdot [S_{h1} + i \cdot \alpha'_0 \cdot S_{h2}]$	
Sin considerar el amortiguamiento interno del material de embebido	Considerando el amortiguamiento interno del material de embebido
S_{h1} ; S_{h2} Factores de impedancia obtenidos en función al tipo de suelo $Z_{h_Re}^2 = G' \cdot H_e \cdot S_{h1}$; $Z_{h_Im}^2 = G' \cdot H_e \cdot \alpha'_0 \cdot S_{h2}$ $C_{h_i}^2 = \frac{Z_{h_Im}^2}{\omega}$	$K_h^2 = Z_{h_Re}^2 - 2 \cdot D_i \cdot C_{h_i}^2 \cdot \omega$ $C_h^2 = C_{h_i}^2 + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z_{h_Re}^2}{\omega}$
Impedancia Rotacional de Balanceo ϕ: $Z_\phi^2 = G' \cdot r_\phi^2 \cdot H_e \cdot [S_{\phi1} + i \cdot \alpha'_\phi \cdot S_{\phi2}]$	
Sin considerar el amortiguamiento interno del material de embebido	Considerando el amortiguamiento interno del material de embebido
$S_{\phi1}$; $S_{\phi2}$ Factores de impedancia obtenidos en función al tipo de suelo $Z_{\phi_Re}^2 = G' \cdot r_\phi^2 \cdot H_e \cdot S_{\phi1}$; $Z_{\phi_Im}^2 = G' \cdot r_\phi^2 \cdot H_e \cdot \alpha'_\phi \cdot S_{\phi2}$ $C_{\phi_i}^2 = \frac{Z_{\phi_Im}^2}{\omega}$	$K_\phi^2 = Z_{\phi_Re}^2 - 2 \cdot D_i \cdot C_{\phi_i}^2 \cdot \omega$ $C_\phi^2 = C_{\phi_i}^2 + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z_{\phi_Re}^2}{\omega}$
Impedancia Rotacional de Balanceo θ: $Z_\theta^2 = G' \cdot r_\theta^2 \cdot H_e \cdot [S_{\theta1} + i \cdot \alpha'_\theta \cdot S_{\theta2}]$	
Sin considerar el amortiguamiento interno del material de embebido	Considerando el amortiguamiento interno del material de embebido
$S_{\theta1}$; $S_{\theta2}$ Factores de impedancia obtenidos en función al tipo de suelo $Z_{\theta_Re}^2 = G' \cdot r_\theta^2 \cdot H_e \cdot S_{\theta1}$; $Z_{\theta_Im}^2 = G' \cdot r_\theta^2 \cdot H_e \cdot \alpha'_\theta \cdot S_{\theta2}$ $C_{\theta_i}^2 = \frac{Z_{\theta_Im}^2}{\omega}$	$K_\theta^2 = Z_{\theta_Re}^2 - 2 \cdot D_i \cdot C_{\theta_i}^2 \cdot \omega$ $C_\theta^2 = C_{\theta_i}^2 + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z_{\theta_Re}^2}{\omega}$

G' : Modulo de corte dinámico de la capa lateral que puede representar el relleno o el mismo material del suelo de apoyo

α' : Frecuencia adimensional obtenida con las mismas expresiones del suelo de apoyo, pero aplicado a la capa de relleno

H_e : Profundidad de embebido o empotramiento de la fundación en el suelo lateral

Fuente: Modificado de Veletsos y Verbič (1973)

Tabla 3.12. Función de Impedancia rotacional de torsión (Solución 2)

Solución 2. Funciones de Impedancia considerando el embebido de la fundación	
Impedancia Rotacional de Torsión ψ:	$Z^2_{\psi} = G' \cdot r_{\psi}^2 \cdot H_e \cdot [S_{\eta 1} + i \cdot \alpha'_{\psi} \cdot S_{\eta 2}]$
Sin considerar el amortiguamiento interno del material de embebido	Considerando el amortiguamiento interno del material de embebido
$S_{\eta 1}$; $S_{\eta 2}$ Factores de impedancia obtenidos en función al tipo de suelo $Z^2_{\psi_{Re}} = G' \cdot r_{\psi}^2 \cdot H_e \cdot S_{\eta 1}$; $Z^2_{\psi_{Im}} = G' \cdot r_{\psi}^2 \cdot H_e \cdot \alpha'_{\psi} \cdot S_{\eta 2}$ $C^2_{\psi_{I}} = \frac{Z^2_{\psi_{Im}}}{\omega}$	$K^2_{\psi} = Z^2_{\psi_{Re}} - 2 \cdot D_i \cdot C^2_{\psi_{I}} \cdot \omega$ $C^2_{\psi} = C^2_{\psi_{I}} + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z^2_{\psi_{Re}}}{\omega}$

G' : Modulo de corte dinámico de la capa lateral que puede representar el relleno o el mismo material del suelo de apoyo

α'_{ψ} : Frecuencia adimensional obtenida con las mismas expresiones del suelo de apoyo, pero aplicado a la capa de relleno

H_e : Profundidad de embebido o empotramiento de la fundación en el suelo lateral

Fuente: Modificado de Veletsos y Verbič (1973)

Donde los factores de impedancias en función a dos amplias clases de suelos (cohesivos y granulares), pueden obtenerse de la siguiente tabla:

Tabla 3.13. Factores de impedancias en función del tipo de suelo ($D_i = 0$)

Movimiento	Suelo lateral	Factores de rigidez	
Vertical	Tipo	S_{v1}	S_{v2}
	Cohesivo	2.70	6.70
	Granular	2.70	6.70
Horizontal	Tipo	S_{h1}	S_{h2}
	Cohesivo	4.10	10.60
	Granular	4.00	9.10
Balanceo	Tipo	$S_{\phi 1}$	$S_{\phi 2}$
	Cohesivo	2.50	1.80
	Granular	2.50	1.80
Torsión	Tipo	$S_{\eta 1}$	$S_{\eta 2}$
	Cohesivo	10.20	5.40
	Granular	10.20	5.40

Nota: Los valores de la tabla son válidos para valores de frecuencias adimensionales $0.5 \leq \alpha' \leq 1.5$ y para coeficientes de Poisson entre 0.25 a 0.40

Fuente: Modificado de Veletsos y Verbič (1973)

A continuación, se muestran las soluciones completas para los resortes y amortiguamientos del sistema, donde los valores finales para los amortiguamientos, son reducidos a un 50% por recomendaciones de los mismos autores, debido a la no consideración estratigráfica, anisotrópica y otras incertidumbres asociadas al suelo.

Resortes y amortiguamientos traslacionales verticales en dirección z :

$$K_z = K_v^1 + K_v^2 \quad \text{Ec. (73)}$$

$$C_z = 0.50 \cdot (C_v^1 + C_v^2) \quad \text{Ec. (74)}$$

Resortes y amortiguamientos traslacionales horizontales en las direcciones x e y :

$$K_x = K_h^1 + K_h^2 \quad ; \quad K_y = K_x \quad \text{Ec. (75)}$$

$$C_x = 0.50 \cdot (C_h^1 + C_h^2) \quad ; \quad C_y = C_x \quad \text{Ec. (76)}$$

Resortes y amortiguamientos rotacionales de balanceo en dirección ϕ :

$$K_\phi = K_\phi^1 + K_\phi^2 \quad \text{Ec. (77)}$$

$$C_\phi = 0.50 \cdot (C_\phi^1 + C_\phi^2) \quad \text{Ec. (78)}$$

Resortes y amortiguamientos rotacionales de balanceo en dirección θ :

$$K_\theta = K_\theta^1 + K_\theta^2 \quad \text{Ec. (79)}$$

$$C_\theta = 0.50 \cdot (C_\theta^1 + C_\theta^2) \quad \text{Ec. (80)}$$

Resortes y amortiguamientos rotacionales de torsión en dirección ψ :

$$K_\psi = K_\psi^1 + K_\psi^2 \quad \text{Ec. (81)}$$

$$C_\psi = 0.50 \cdot (C_\psi^1 + C_\psi^2) \quad \text{Ec. (82)}$$

Se debe notar que, en este modelo, el amortiguamiento interno del suelo se ha introducido en los componentes de la impedancia dinámica, a diferencia del modelo anterior, donde se añadió sin afectar la rigidez (método menos preciso). Por ello, el modelo de Veletsos y Verbič (1973) resulta más adecuado para los objetivos de la presente investigación.

3.5.2.6 Frecuencias naturales y verificación de resonancia en el sistema

Al tenerse un sistema de fundación de máquina que sufre seis modos de vibración, es decir, tres modos de traslación y tres modos de rotación, las frecuencias naturales podrán ser evaluadas de forma analítica por los métodos vistos anteriormente, ya sea para el método clásico de la teoría de vibraciones cuya formulación se resumen en las siguientes tablas o por el método de la respuesta modal vistas en la sección 2.4.2, en el cual se considera a la ecuación de frecuencias $|\mathbf{K} - \mathbf{M} \omega_n^2| = 0$, para determinar las frecuencias naturales de sistemas acoplados. Según Chopra (2020), el análisis de valores propios sigue siendo la tarea más formidable en todo el ámbito del análisis dinámico, especialmente cuando los grados de libertad de un sistema son grandes.

Tabla 3.14. Frecuencias naturales angulares límite para los seis modos de vibración

Frecuencias angulares límite	Observaciones
$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{K_z}{m}} \quad ; \quad \omega_{ny} = \sqrt{\frac{K_y}{m}} \quad ; \quad \omega_{nz} = \sqrt{\frac{K_z}{m}}$	Frecuencias angulares límite en los modos traslacionales x, y ,z
$\omega_{n\phi} = \sqrt{\frac{K_\phi}{I_{mox}}} \quad ; \quad \omega_{n\theta} = \sqrt{\frac{K_\theta}{I_{moy}}} \quad ; \quad \omega_{n\psi} = \sqrt{\frac{K_\psi}{I_{moz}}}$	Frecuencias angulares límite en los modos rotacionales, alrededor de los ejes x, y ,z

Fuente: Modificado de Bhatia (2008b)

Tabla 3.15. Frecuencias naturales para los modos desacoplados del sistema

Frecuencias naturales desacopladas	Observaciones
$\omega_z = \omega_{nz} \quad \Rightarrow \quad f_z = \frac{\omega_z}{2 \cdot \pi}$	Frecuencia natural del sistema, para el modo en dirección traslacional vertical en z
$\omega_\psi = \omega_{n\psi} \quad \Rightarrow \quad f_\psi = \frac{\omega_\psi}{2 \cdot \pi}$	Frecuencia natural del sistema, para el modo en dirección rotacional de torsión en ψ

Fuente: Modificado de Bhatia (2008b)

Tabla 3.16. Frecuencias naturales para los modos acoplados del sistema

Frecuencias naturales acopladas en el Plano y-z			
$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{1}{2\gamma_x}(\omega_{ny}^2 + \omega_{n\phi}^2) - \frac{1}{2\gamma_x}\sqrt{(\omega_{ny}^2 + \omega_{n\phi}^2)^2 - 4\gamma_x\omega_{ny}^2\omega_{n\phi}^2}}$			
$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{1}{2\gamma_x}(\omega_{ny}^2 + \omega_{n\phi}^2) + \frac{1}{2\gamma_x}\sqrt{(\omega_{ny}^2 + \omega_{n\phi}^2)^2 - 4\gamma_x\omega_{ny}^2\omega_{n\phi}^2}}$			
$\gamma_x = \frac{I_{mcx}}{I_{mox}} \quad ; \quad \omega_{ny}^2 = \frac{K_y}{m} \quad ; \quad \omega_{n\phi}^2 = \frac{K_\phi}{I_{mox}}$			
$\omega_y = \omega_{n1}$	$\Rightarrow$	$f_y = \frac{\omega_y}{2 \cdot \pi}$	Frecuencia natural del sistema, para el modo en dirección traslacional horizontal en y
$\omega_\phi = \omega_{n2}$	$\Rightarrow$	$f_\phi = \frac{\omega_\phi}{2 \cdot \pi}$	Frecuencia natural del sistema, para el modo en dirección rotacional de balanceo en ϕ
Frecuencias naturales acopladas en el Plano x-z			
$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{1}{2\gamma_y}(\omega_{nx}^2 + \omega_{n\theta}^2) - \frac{1}{2\gamma_y}\sqrt{(\omega_{nx}^2 + \omega_{n\theta}^2)^2 - 4\gamma_y\omega_{nx}^2\omega_{n\theta}^2}}$			
$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{1}{2\gamma_y}(\omega_{nx}^2 + \omega_{n\theta}^2) + \frac{1}{2\gamma_y}\sqrt{(\omega_{nx}^2 + \omega_{n\theta}^2)^2 - 4\gamma_y\omega_{nx}^2\omega_{n\theta}^2}}$			
$\gamma_y = \frac{I_{mcy}}{I_{moy}} \quad ; \quad \omega_{nx}^2 = \frac{K_x}{m} \quad ; \quad \omega_{n\theta}^2 = \frac{K_\theta}{I_{moy}}$			
$\omega_x = \omega_{n1}$	$\Rightarrow$	$f_x = \frac{\omega_x}{2 \cdot \pi}$	Frecuencia natural del sistema, para el modo en dirección traslacional horizontal en x
$\omega_\theta = \omega_{n2}$	$\Rightarrow$	$f_\theta = \frac{\omega_\theta}{2 \cdot \pi}$	Frecuencia natural del sistema, para el modo en dirección rotacional de balanceo en θ

Fuente: Modificado de Bhatia (2008b)

Se hace notar que para los modos acoplados en el plano (y-z), la frecuencia natural angular más baja será ω_{n1} y corresponderá predominantemente al modo traslacional en **y**.

Por otra parte, la frecuencia natural más alta ω_{n2} , corresponderá al modo de desplazamiento angular ϕ .

De la misma forma que el plano anterior, las frecuencias naturales en los modos respectivos son correspondidos para el plano (x-z).

En cualquier circunstancia, se hace lo posible por garantizar que estas frecuencias no estén en resonancia directa con la velocidad de operación o velocidad de la máquina. Estas frecuencias deben ser preferiblemente distanciadas por un margen de $\pm 20\%$ de la velocidad de funcionamiento de la máquina.

Para determinar si las frecuencias naturales en los modos respectivos, se encuentran o no en zona de resonancia, se halla el margen con respecto a la velocidad de operación para las seis frecuencias naturales del sistema, a partir de:

$$M_i = \left| 1 - \frac{f_i}{f} \right| * 100\% \quad \text{Ec. (83)}$$

Donde:

f es la frecuencia o velocidad de operación de la máquina y f_i corresponde a las seis frecuencias naturales en sus modos respectivos, siendo $i = x, y, z, \phi, \theta, \psi$.

Si el margen correspondiente a cada frecuencia natural es $M_i \leq 20\%$, es decir las frecuencias naturales se encuentran dentro del $\pm 20\%$ de la velocidad de funcionamiento de la máquina, dichas frecuencias naturales estarán en zona de resonancia.

Para casos extremos de resonancia, se hará necesario alterar adecuadamente las dimensiones de la fundación y repetir los cálculos hasta que las frecuencias naturales se encuentran lejos de la velocidad de funcionamiento de la máquina.

3.5.2.7 Amplitudes máximas de vibración

Las amplitudes $x_0, y_0, z_0, \phi_0, \theta_0$ y ψ_0 ubicados en el centro de rigidez O , que pueden ser obtenidos por cualquiera de los métodos analíticos descritos en la sección 2.4, necesitan

transformarse en amplitudes traslacionales máximas, ubicadas en la parte superior de las esquinas del sistema de fundación, a fin de poder evaluarlos con los valores permisibles, que a diferencia con el MEF, estas amplitudes máximas pueden ser obtenidas de forma inmediata y en cualquier punto requerido.

Por lo que se hace necesario determinar dichas amplitudes máximas a partir de una transformación geométrica, pues, aunque se tengan desplazamientos pequeños en micrones (10^{-6} metros), estas deben determinarse con técnicas apropiadas a fin obtener cálculos más precisos, ya que en la literatura revisada solo hacen uso de simplificaciones geométricas.

A continuación, se presentan formulaciones de **transformaciones geométricas**, para obtener los desplazamientos máximos, las cuales han sido modificadas y cuidadosamente adecuadas de Schneider y Eberly (2003) y Jazar (2022), aplicándolas al caso de estudio.

Conociendo las dimensiones de un sistema de fundación genérica, con las amplitudes de traslación y rotación en los 6 grados de libertad ubicados en el centro de rigidez, así como las coordenadas de los puntos en los bordes superiores de la fundación (ver **Figura 3.7** y **Figura 3.8**), se podrá obtener lo siguiente:

$$\mathbf{P}'_i = \mathbf{R}_z(\psi_o) \cdot \mathbf{R}_y(\theta_o) \cdot \mathbf{R}_x(\phi_o) \cdot \mathbf{T}(x_o, y_o, z_o) \cdot \mathbf{P}_i \quad \text{Ec. (84)}$$

Donde:

$\mathbf{P}'_i$: Matriz general de transformación, debido a la traslación y rotación de los vectores punto, en los bordes superiores de la fundación con respecto a O

$\mathbf{R}_z$: Matriz de rotación alrededor del eje z respecto al centro de rigidez en O

$\mathbf{R}_y$: Matriz de rotación alrededor del eje y respecto al centro de rigidez en O

$\mathbf{R}_x$: Matriz de rotación alrededor del eje x respecto al centro de rigidez en O

$\mathbf{T}$: Matriz de traslación general de los desplazamientos a lo largo de los ejes x, y, z

$\mathbf{P}_i$: Matriz extendida de los vectores punto, en los bordes superiores de la fundación

Las matrices anteriores son obtenidas a partir de las coordenadas o vectores punto de los bordes superiores de la fundación y de las amplitudes de traslación y rotación en O.

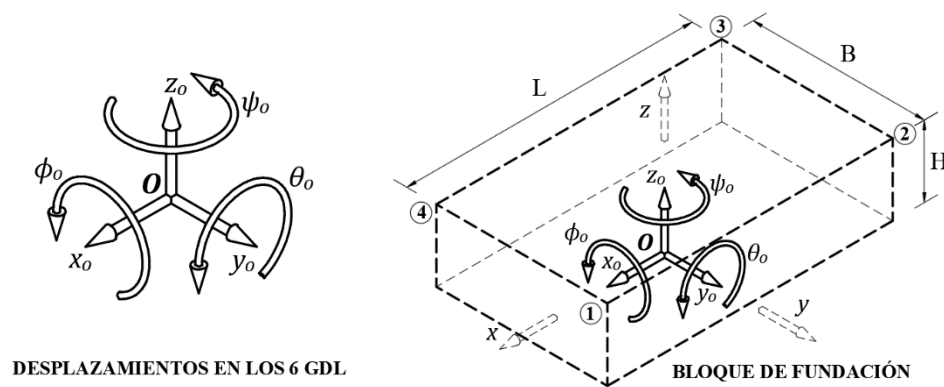


Figura 3.7. Amplitudes de traslación y rotación de un sistema de fundación

Fuente: Elaboración Propia

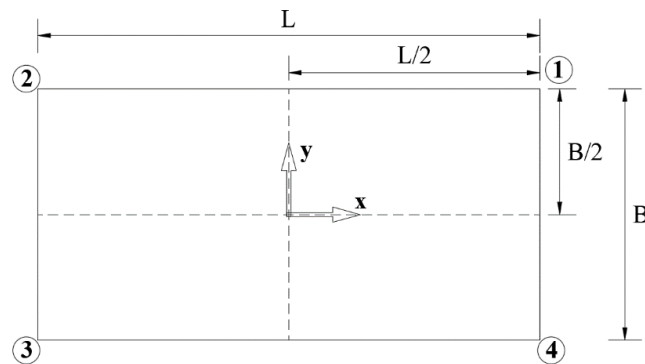


Figura 3.8. Puntos en los bordes superiores de un sistema de fundación

Fuente: Elaboración Propia

En la **Tabla 3.17**, se resumen las expresiones para las matrices descritas anteriormente.

Tabla 3.17. Expresiones matriciales de rotación, traslación y de vectores punto

Matrices de rotación alrededor de los ejes x, y, z		
$R_x(\phi_o) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_o) & -\sin(\phi_o) & 0 \\ 0 & \sin(\phi_o) & \cos(\phi_o) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$R_y(\theta_o) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_o) & 0 & \sin(\theta_o) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_o) & 0 & \cos(\theta_o) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$R_z(\psi_o) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_o) & -\sin(\psi_o) & 0 & 0 \\ \sin(\psi_o) & \cos(\psi_o) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matriz de traslación general en función de las amplitudes traslacionales		Matriz extendida con los vectores de puntos correspondientes a los bordes superiores de la fundación
$T(x_o, y_o, z_o) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_o \\ 0 & 1 & 0 & y_o \\ 0 & 0 & 1 & z_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$P_i = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Fuente: Elaboración Propia

Con el reemplazo de las anteriores expresiones matriciales en la Ec. (84) y sustituyendo en las ecuaciones vectoriales siguientes, se obtienen las amplitudes de desplazamientos finales, en los bordes superiores de la fundación.

$$\begin{bmatrix} x_{f_1} \\ y_{f_1} \\ z_{f_1} \end{bmatrix} = P'_1 - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (85)}$$

$$\begin{bmatrix} x_{f_2} \\ y_{f_2} \\ z_{f_2} \end{bmatrix} = P'_2 - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (86)}$$

$$\begin{bmatrix} x_{f_3} \\ y_{f_3} \\ z_{f_3} \end{bmatrix} = P'_3 - \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (87)}$$

$$\begin{bmatrix} x_{f_4} \\ y_{f_4} \\ z_{f_4} \end{bmatrix} = P'_4 - \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (88)}$$

Por último, las amplitudes de desplazamiento finales máximos de vibración, de todos los puntos considerados en los bordes superiores del sistema de fundación, son obtenidos de:

$$\Delta x_{f_m\acute{a}x} = m\acute{a}x(|x_{f_1}|, |x_{f_2}|, |x_{f_3}|, |x_{f_4}|) \quad \text{Ec. (89)}$$

$$\Delta y_{f_m\acute{a}x} = m\acute{a}x(|y_{f_1}|, |y_{f_2}|, |y_{f_3}|, |y_{f_4}|) \quad \text{Ec. (90)}$$

$$\Delta z_{f_m\acute{a}x} = m\acute{a}x(|z_{f_1}|, |z_{f_2}|, |z_{f_3}|, |z_{f_4}|) \quad \text{Ec. (91)}$$

En base a consideraciones similares, también podemos evaluar las amplitudes de desplazamientos en otras ubicaciones. Finalmente, debe garantizarse que las amplitudes de vibración estén dentro de los valores permitidos. Si el análisis muestra amplitudes más grandes, es esencial rediseñar la fundación, volviendo a analizar el sistema hasta que se consiga los valores aceptables para las amplitudes de vibración.

3.6 METODOLOGÍA DE MODELADO PARA EL MEF

3.6.1 Formulación del modelo dinámico computacional

La incertidumbre en la descripción de las dependencias matemáticas de un modelo físico, incluida la dinámica de estructuras, conducen a la imposibilidad de una descripción

completa en dicho modelo Ioskéovich (2022). Por ello, se introducen diversas suposiciones en relación con los parámetros geométricos de las estructuras y las propiedades físicas y mecánicas de sus materiales. La introducción de estos supuestos conduce a la creación de modelos dinámicos computacionales.

De acuerdo a Ioskéovich (2022), el cálculo de una estructura sometida a cargas dinámicas, va precedido de un cálculo de las características dinámicas (frecuencias naturales y modos de vibración), por lo que para el modelado por el Método de Elementos Finitos (MEF), se parte de la misma idea planteada en los métodos analíticos, así como los descritos en el acápite 2.4.4., donde se trata de los aspectos principales a tomarse en cuenta en el MEF.

En esta sección, y con el fin de aplicar el MEF al sistema de fundación para una máquina centrífuga, se establecerán tres puntos esenciales para su empleo en un programa de ordenador:

- Tipo de elementos a emplear en el modelado
- Forma de aplicación de las cargas dinámicas
- Condiciones de borde en el modelado

Estos puntos se consideran fundamentales, incluso al elegir el programa (herramienta) para el MEF. Dependiendo de la herramienta (software) seleccionada, se deben considerar todas las opciones disponibles para efectuar un análisis dinámico, con el objetivo de asegurar que los resultados sean válidos, efectivos y útiles para la correcta aplicación práctica del modelo.

La elección del software de elementos finitos para un análisis dinámico no se basará únicamente en la capacidad de modelar geometrías complejas, sino que también deberá ofrecer un amplio rango de posibilidades para representar condiciones y diversas variables. Por ejemplo, para considerar las restricciones de vínculo entre los puntos de apoyo sobre la fundación y el eje (Shaft) rotor del equipo, especialmente en el caso de una máquina centrífuga, es recomendable aplicar las cargas dinámicas en el Shaft, a fin de representar las condiciones reales del problema.

Por lo mismo, la asignación de cargas o fuerzas dinámicas a través de un análisis tiempo historia es común en muchos programas de elementos finitos, por lo que el método por integración directa juega un papel importante para poder comprender los parámetros solicitados en la mayoría de los programas de ordenador.

Por otra parte, las condiciones de borde, especialmente el empleo de rigideces equivalentes representadas como resortes y amortiguamientos en los nodos de los elementos finitos discretizados, son cruciales en el modelado. A diferencia de otros programas comerciales, que generalmente solo permiten asignar rigidez, el software Structural Analysis Program 2000 (SAP2000) se destaca por ofrecer la posibilidad de incorporar tanto rigidez como amortiguamiento a través de sus funciones de "links properties". Este aspecto es determinante, ya que los métodos analíticos requieren el uso de impedancias dinámicas para obtener resultados precisos, lo que hace de SAP2000 una opción adecuada para este tipo de simulaciones.

De la literatura investigada, SAP2000 presenta varias ventajas frente a otros softwares como ANSYS Workbench, PLAXIS 3D y ABAQUS, lo que lo convierte en una opción sólida para el análisis de cimentaciones y estructuras. En primer lugar, SAP2000 es conocido por su interfaz amigable y su facilidad de uso, lo que permite una modelación rápida y eficiente sin la necesidad de un entrenamiento extenso, a diferencia de ANSYS Workbench y ABAQUS, que requieren un conocimiento más profundo debido a su complejidad y múltiples opciones de simulación (Gagnano et al., 2014; Lallotra y Singhal, 2017). SAP2000 es particularmente ventajoso en proyectos de análisis estructural general, ya que ofrece una gran flexibilidad en la definición de condiciones de frontera y en el modelado de diversas estructuras (Ioskéovich, 2022). Las opciones de modelado, como la incorporación del amortiguamiento en las condiciones de contorno, así como los enlaces y restricciones de cuerpo rígido integradas en SAP2000, reflejan el comportamiento dinámico real de un sistema de cimentación para máquina (Khaled y Gomaa, 2021). Por otro lado, ANSYS Workbench es reconocido por sus potentes capacidades de análisis multifísico, pero su interfaz, aunque poderosa, es más compleja y menos accesible para usuarios sin experiencia previa (Lee, 2021). PLAXIS 3D,

especializado en análisis geotécnicos, ofrece una simulación precisa de la interacción suelo-estructura, pero no es tan versátil como SAP2000 para modelos estructurales generales (Utami, 2022). En cuanto a ABAQUS, es una excelente opción para simulaciones no lineales complejas, pero su uso está más centrado en análisis avanzados que requieren de mayor tiempo y conocimiento para configurar correctamente los modelos (Hejazi y Esfahani, 2021).

En resumen, SAP2000 se destaca por su equilibrio entre funcionalidad, facilidad de uso y versatilidad, lo que lo hace ideal para estudios que requieren tanto análisis estructurales como dinámicos sin la complejidad de otros softwares más especializados.

3.6.2 Tipo de elementos empleados en el modelado

Según las recomendaciones descritas en el acápite 2.4.4, el comportamiento estructural de un sistema de fundación para máquina puede modelarse mediante elementos sólidos (ACI Committee 351, 2018; American Society of Civil Engineers, 2018).

Los elementos sólidos en el programa SAP2000, generalmente presentan ocho nodos y se basan en formulaciones isoperimétricas que incluyen nueve modos de flexión incompatibles opcionales, las cuales mejoran el comportamiento incluso con geometrías de elementos no rectangulares (Casanova Colon, 2016).

Cada elemento sólido posee coordenadas locales de material y coordenadas locales de elemento (propiedad). El sistema de coordenadas del material se orienta con respecto al sistema de coordenadas del elemento a través de tres ángulos A, B y C, siendo significativo para materiales ortotrópicos y anisótropos, ya que los materiales considerados como isotrópicos son independientes de cualquier sistema de coordenadas. Los modos de flexión incompatibles también pueden suprimirse en problemas exentos de flexión, como el caso de análisis geotécnicos, estas propiedades descritas pueden verse en la **Figura 3.9**.

Se debe comprender las características generales, la aplicabilidad y las limitaciones de los elementos finitos utilizados en el modelado de fundaciones para máquinas, prestando

especial atención a la conexión de diferentes tipos de elementos, a fin de garantizar la compatibilidad adecuada entre los nodos, aristas y caras comunes, así como el aspecto del tipo de elemento para representar la geometría real de la estructura (Ioskéovich, 2022).

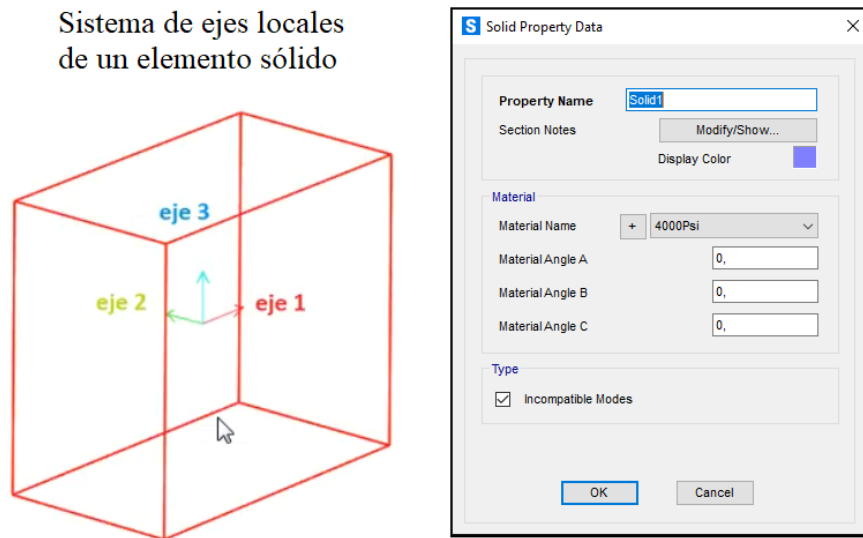


Figura 3.9. Ejes locales y propiedades de elementos sólidos en SAP2000

Fuente: Elaboración Propia

Una pauta genérica tomada del American Society of Civil Engineers (2018) para la relación de aspecto en el desarrollo del modelado por el MEF, es que estas sean menores o iguales a 2, sin distorsiones de bordes, angulares o paralelas.

3.6.3 Modelado de cargas generales y fuerzas dinámicas

Las cargas o fuerzas en general, se distribuyen en los nodos dentro de un volumen o en una superficie. En los casos en que las fuerzas sean excéntricas con respecto al punto nodal, se puede utilizar una combinación de momentos y fuerzas para una transferencia adecuada de carga, según los grados de libertad permitidos en el tipo de elemento usado.

Como se mencionó anteriormente las fuerzas dinámicas, de preferencia deben aplicarse en los puntos nodales a lo largo de la línea central del eje del rotor (Shaft de máquinas centrífugas) en cada ubicación de los rodamientos o según se especifique en la ficha técnica del equipo, pues en el modelado de los puntos de dicho eje, estos deberán ser

conectados a los soportes de la fundación a través de enlaces rígidos (American Society of Civil Engineers, 2018).

En el programa SAP2000, estos vínculos rígidos pueden representarse mediante los “Joint Constraints”. La selección de la opción “Body Constraints” permite restringir los 6 GDL de varios puntos unidos como cuerpos rígidos.

3.6.4 Modelado de las condiciones de borde

Como se pudo observar en apartados anteriores, las fundaciones de bloques rígidos soportados por el suelo por medio de impedancias estáticas o dinámicas, se pueden modelar matemáticamente utilizando seis conjuntos de propiedades de rigidez y amortiguación, tres traslacionales y tres rotacionales en el centro de rigidez de la base. Para fundaciones modeladas por el MEF soportadas por el suelo, pueden existir diferentes enfoques para la modelar la respuesta del suelo, no obstante, el enfoque práctico recomendado en la literatura y por diversos investigadores es utilizar una subestructuración del modelo, donde la respuesta del suelo se captura empleando matrices de resortes y amortiguamientos (American Society of Civil Engineers, 2018).

Para modelar el sistema de fundación con elementos sólidos, en este trabajo se propone conectar rigidamente el perímetro de la base del bloque al centro de gravedad de la superficie en contacto con el suelo. En dicho punto se aplican las impedancias dinámicas equivalentes (resortes y amortiguamientos) en los 6 GDL del sistema, conforme al apartado 3.5.2.5. Esta formulación permite representar de forma acoplada el comportamiento dinámico. Aunque otros enfoques distribuyen las impedancias por nodo, aquí se concentran en el centro de rigidez, como parte de un desarrollo metodológico propio incorporado al modelo. Inicialmente se adoptó el enfoque convencional de distribución nodal, según las referencias (ACI Committee 351, 2018; American Society of Civil Engineers, 2018), especialmente para elementos finitos irregulares. Sin embargo, tras múltiples comparaciones con los métodos analíticos, se observaron diferencias importantes. Por ello, se adoptó la vinculación rígida del perímetro con el centro de rigidez, mejorando significativamente la representación dinámica mediante el MEF.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DINÁMICO DE UNA FUNDACIÓN DE BLOQUE COMBINADO PARA MÁQUINA DE TURBINA A GAS

4.1 DESCRIPCIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO

El problema de investigación se basa en los datos geométricos para un cimiento bajo cargas estáticas y dinámicas de una máquina QDRA70 (turbina a gas), propuestos por la corporación internacional Dongturbo Electric Company Ltd (DTEC), con sede en Chengdu-China. Estos datos utilizados con fines académicos, han sido adaptados aquí con ligeras modificaciones para poder analizar fundaciones en proyectos termoeléctricos (generación de electricidad con turbinas a gas) ubicados en Bolivia.

Las propiedades del concreto para la fundación siguen los estándares locales (NB 1225001). Los datos del suelo para la simulación provienen de un estudio geotécnico en Santa Cruz, representando condiciones típicas de zonas industriales con estratos cohesivos subyacentes. Esta adaptación simula el comportamiento de fundaciones superficiales sometidas a cargas dinámicas, en un entorno crítico y consistente con las formulaciones empleadas para la solución de los modelos de estudio, garantizando precisión y fiabilidad en el análisis dinámico mediante los métodos analíticos y de elementos finitos.

4.1.1 Descripción y parámetros de la máquina

La máquina consiste en una turbina que proporcionará energía de 12.90MW, a partir de un chorro de gases calientes provenientes de la combustión de gas natural, cuya elevada entalpía accionará una turbina de potencia acoplada a un eje y que este a su vez, estará unido al equipo de proceso de generación eléctrica (generador).

Por lo que la máquina de turbina a gas estará formada por dos elementos principales:

- **Productor de gases:** Está formado a su vez por uno o varios compresores de aire, la cámara de combustión y la turbina de expansión o sustentación la cual solo suministra la potencia necesaria para manejar al compresor de aire.

- **Turbina de potencia:** La unidad generadora o turbina de potencia es donde se obtendrá la potencia útil de la máquina.

El esquema con los elementos principales de la turbina a gas se muestra en la **Figura 4.1**.

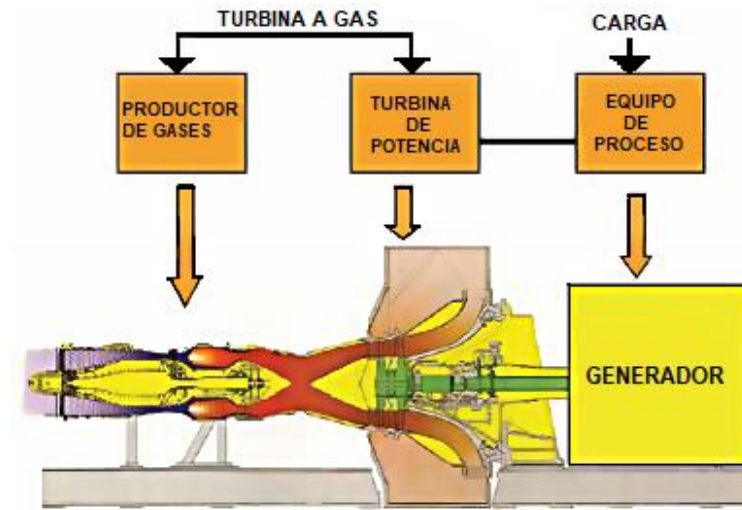


Figura 4.1. Componentes principales de la máquina de turbina a gas

Fuente: Modificado y adaptado de Soares (2014, p. 97)

Según el fabricante del equipo (DTEC), los puntos de carga que constituyen el peso total de la máquina, para los cuales se propone la geometría en planta de la fundación, son:

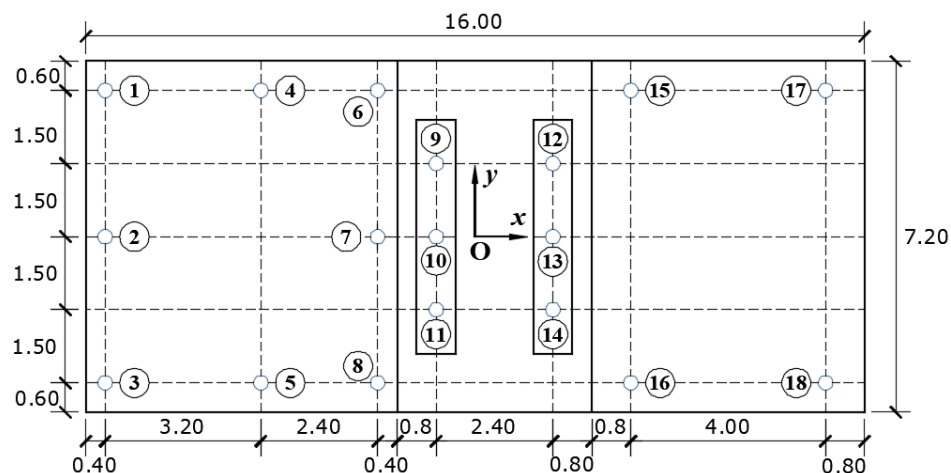


Figura 4.2. Geometría en planta de la fundación y puntos de carga del equipo

Fuente: Elaboración Propia

Los parámetros de interés de la máquina se resumen de la siguiente manera:

- Frecuencia de operación normal del equipo: $\omega_1 = 2250 \text{ [rpm]}$
- Frecuencia crítica de falla del equipo: $\omega_2 = \frac{\omega_1}{5} = 450 \text{ [rpm]}$
- Frecuencia considerada para el análisis: $\omega = \omega_2 = 450 \text{ [rpm]}$

Tabla 4.1. Cargas estáticas, dinámicas y coordenadas de los pernos de anclaje

Nro. de Perno de Anclaje	Cargas Estáticas	Cargas Dinámicas		Coordenadas de puntos de apoyo de los componentes de la máquina respecto a O	
	Carga Vertical [kN]	Carga Vertical [kN]	Carga Horizontal [kN]	x_m [m]	y_m [m]
1	311			-7.60	3.00
2	42	± 7.42	± 7.42	-7.60	0.00
3	311			-7.60	-3.00
4	517			-4.40	3.00
5	517			-4.40	-3.00
6	311			-2.00	3.00
7	50	± 6.90	± 6.90	-2.00	0.00
8	311			-2.00	-3.00
9	200			-0.80	1.50
10	200	± 52.20	± 52.20	-0.80	0.00
11	200			-0.80	-1.50
12	350			1.60	1.50
13	350	± 24.38	± 24.38	1.60	0.00
14	350			1.60	-1.50
15	185			3.20	3.00
16	185			3.20	-3.00
17	185			7.20	3.00
18	185			7.20	-3.00

Fuente: Elaboración Propia

Nota:

- Los pernos de anclaje de la 1 a la 14 corresponden a los componentes de la Turbina a Gas.
- Los pernos de anclaje de la 15 a la 18 pertenecen a los soportes del Generador.

4.1.2 Propiedades estructurales de la fundación

El sistema de fundación de bloque combinado de base rectangular se considera embebido en el suelo. Las dimensiones en planta, mostradas en la **Figura 4.2** anterior, la altura sobre

el nivel de terreno natural (NTN), sugeridas por el fabricante, las propiedades del concreto especificadas para el análisis y demás aspectos, son:

- Largo de la fundación: $L = 16000 \text{ [mm]}$
- Ancho de la fundación: $B = 7200 \text{ [mm]}$
- Altura por encima del NTN: $H_s = 600 \text{ [mm]}$
- Ancho de pedestales: $b_p = 800 \text{ [mm]}$
- Largo de pedestales: $l_p = 4800 \text{ [mm]}$
- Altura de pedestales: $h_p = 1600 \text{ [mm]}$
- Altura del Shaft por encima de la base de fundación: $h_{CL} = 2000 \text{ [mm]}$
- Profundidad de embebido de los pernos de anclaje: $h_{ef} = 460 \text{ [mm]}$
- Resistencia a compresión del concreto: $f'_c = 25 \text{ [MPa]}$
- Peso unitario del concreto: $\gamma_c = 25 \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \right]$
- Módulo elástico del concreto $E_c = 34 \gamma_c^{1.5} \sqrt{f'_c}$: $E_c = 21250000 \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right]$

La geometría en elevación del sistema de fundación, junto con el esquema para el Shaft del rotor de la máquina o equipo, se muestran en la **Figura 4.3**.

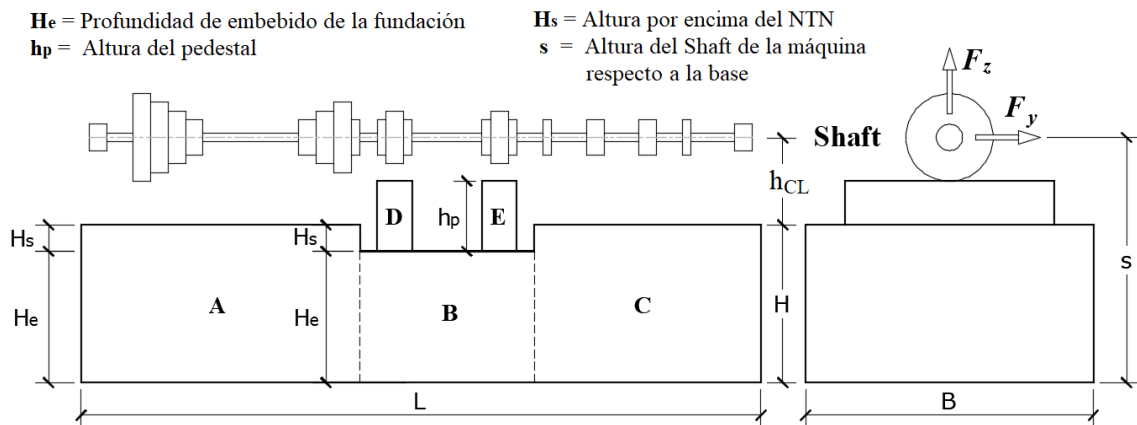


Figura 4.3. Geometría en elevación de la fundación y Shaft del rotor del equipo

Fuente: Elaboración Propia

4.1.3 Parámetros dinámicos del suelo

La caracterización del suelo adoptado para el estudio fue obtenida a partir de una prospección geofísica realizada por la empresa INCOTEC SRL. Esta reveló un suelo de apoyo cohesivo de baja plasticidad (CL) hasta una profundidad de 8 metros, sin nivel freático, cuyas características representativas y de interés para el análisis dinámico son:

- Capacidad portante admisible neta: $q_{adm_neta} = 134 \left[\frac{kN}{m^2} \right]$
- Peso unitario del suelo: $\gamma_s = 18.73 \left[\frac{kN}{m^3} \right]$
- Densidad del suelo: $\rho = 1909.28 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.40$
- Velocidad de Onda de Corte: $V_s = 180 \left[\frac{m}{s} \right]$
- Módulo de Corte Dinámico $G = \rho V_s^2$: $G = 61860.55 \left[\frac{kN}{m^2} \right]$
- Amortiguamiento interno de material (asumido): $D_i = 0.05$

4.2 ANÁLISIS DINÁMICO DEL SISTEMA DE FUNDACIÓN

4.2.1 Modelo matemático para el análisis por métodos analíticos

Los métodos analíticos permiten una aproximación detallada para prever respuestas específicas del sistema. Sin embargo, es fundamental considerar las limitaciones de ciertos modelos, lo que hace necesario actualizar el proceso matemático en el análisis y diseño de fundaciones para máquinas.

Como se discutió anteriormente en la sección 2.4.1, donde se presentaron las ecuaciones de movimiento acopladas en forma estática y dinámica, surgió la pregunta de cuál sería el modelo más adecuado para determinar las frecuencias naturales y amplitudes del sistema.

Se ha observado que las frecuencias naturales obtenidas por ambos modelos permanecen invariantes y que la relación de amortiguamiento para el modelo con acoplamiento dinámico, derivada del método de la respuesta modal, ofrece una mejor predicción

cuantitativa. Esto se debe a que la matriz de amortiguamiento en este último modelo está en forma desacoplada (Chowdhury y Dasgupta, 2009b).

Debido a lo anterior y a las ventajas que ofrecen las ecuaciones con acoplamiento dinámico derivadas a partir de la formulación de Lagrange, como su capacidad para manejar sistemas complejos de manera eficiente, su formulación simétrica y diagonal para los términos de rigidez y amortiguamiento que simplifican los cálculos, y su enfoque energético más integral, estas son empleadas en el análisis para los métodos analíticos.

Los desarrollos numéricos del análisis dinámico para el sistema de fundación por métodos analíticos (CASO 1 B/H=2) se muestran en el **ANEXO I**, donde el software de preferencia usado ha sido PTC MathCad Prime 10, debido a su capacidad para manejar cálculos complejos y simbólicos, presentando soluciones de manera clara y organizada.

4.2.2 Modelación del sistema de fundación por el MEF

Habiéndose establecido los puntos esenciales y la herramienta (software) de análisis en la sección 3.6 del capítulo precedente, se procedió al modelamiento tridimensional (véase **Figura 4.4**) del sistema máquina-fundación-suelo en el programa SAP2000 v.22 (véase **Figura 4.5**), considerando todas las especificaciones descritas en dicha sección.

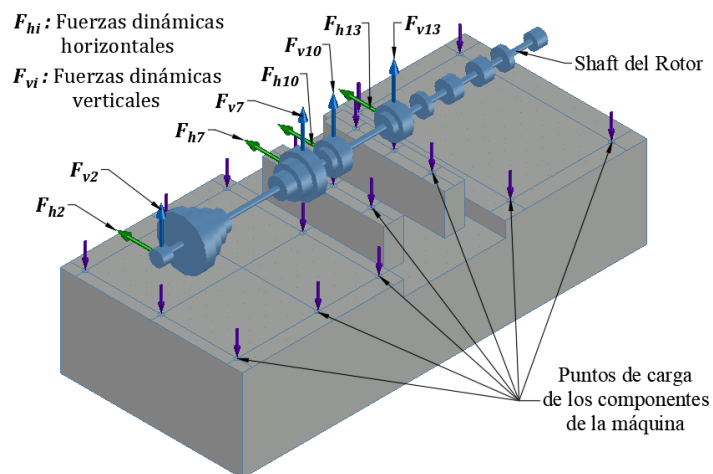


Figura 4.4. Representación física tridimensional del sistema de fundación

Fuente: Elaboración Propia

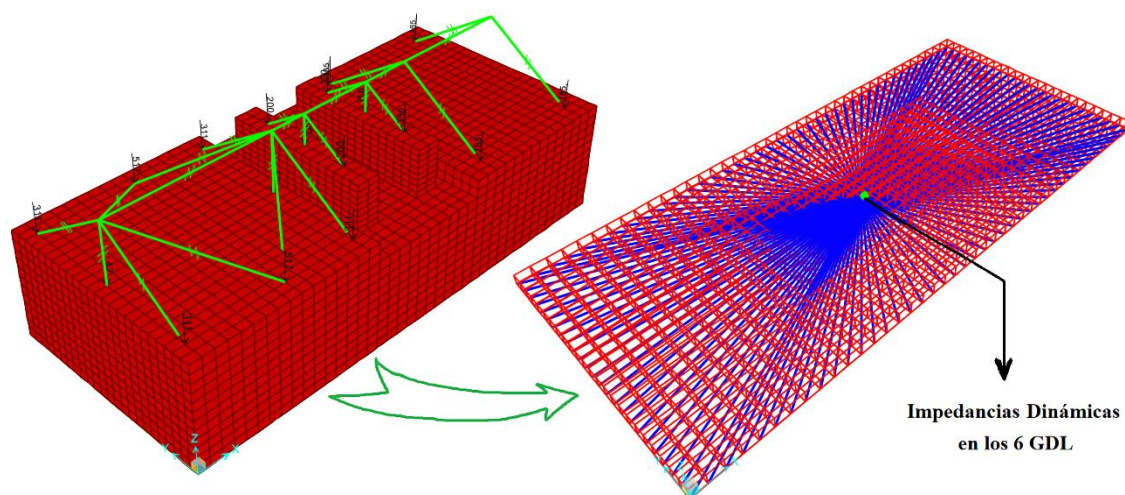


Figura 4.5. Representación del modelo en el programa SAP2000 v.22

Fuente: Elaboración Propia

El modelo de la **Figura 4.5** incluye los componentes en peso y la representación del eje (Shaft) del rotor de la máquina, mediante la unión de vínculos rígidos que se conectan a los soportes en la parte superior de la fundación. La fundación tipo bloque combinado se modeló con elementos sólidos, y el tamaño de los elementos finitos se definió en función de las dimensiones principales, ajustándose a una relación menor igual a dos para optimizar la precisión, especialmente en los pedestales de soporte de la máquina. Las condiciones de borde se aplicaron mediante resortes y amortiguamientos equivalentes, determinados con modelos simplificados de impedancias dinámicas.

En el **ANEXO II** se resumen los tamaños de malla empleados y las impedancias dinámicas totales del sistema en los 6 GDL. Estas impedancias se concentraron en el centro de rigidez, vinculando rígidamente el perímetro de la base con dicho punto, tal como se muestra en la parte derecha de la **Figura 4.5**. Esta estrategia mejora la representación dinámica del sistema suelo-fundación.

Para el análisis se evaluaron cuatro casos, variando el espesor de la fundación, es decir: CASO 1 ($B/H=2$), CASO 2 ($B/H=3$), CASO 3 ($B/H=4$) y CASO 4 ($B/H=6$). Luego, con la introducción de datos en el programa SAP2000, donde se consideró un tipo de análisis

modal de vector propio, se realizó una primera corrida para los cuatro casos con el fin de obtener los primeros seis modos de vibración en términos de frecuencias naturales.

En la **Figura 4.6** se muestran las frecuencias naturales del sistema de fundación correspondientes a las seis primeras formas modales, obtenidas del programa SAP2000 para el CASO 1 (B/H=2).

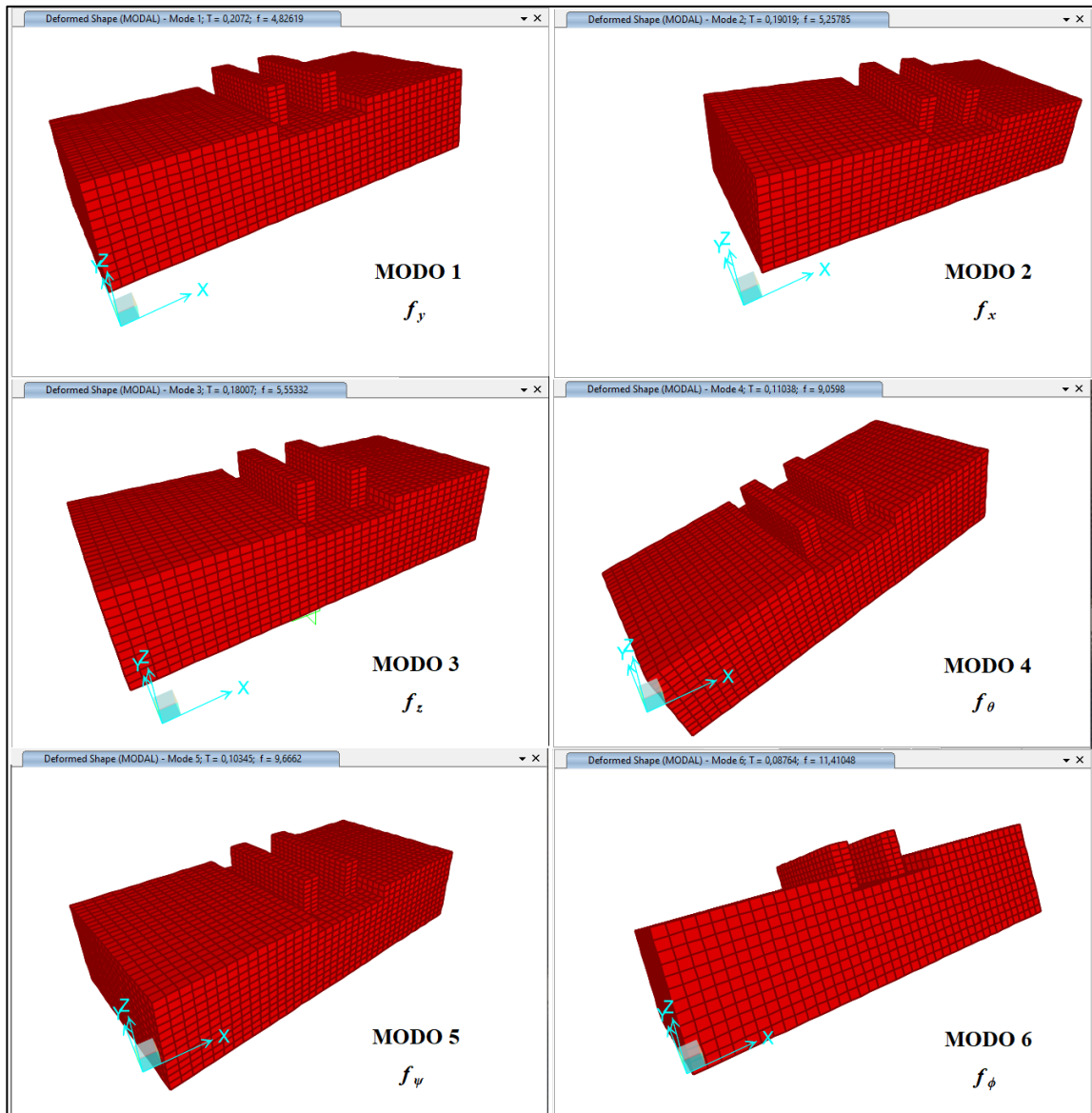


Figura 4.6. Frecuencias y formas modales obtenidas del MEF (CASO 1)

Fuente: Elaboración Propia

Luego, según el caso de análisis, el modelo del sistema de fundación para la máquina se analizó bajo la acción de las fuerzas dinámicas que actúan en los puntos de carga ubicados en el eje del rotor. Se estableció el análisis tiempo-historia mediante la opción Load Cases/Load Case Type/Time History con solución por integración directa. Previamente, se definieron los patrones de carga (fuerzas unitarias en el eje del rotor) y las funciones adimensionales para las fuerzas dinámicas de excitación armónica. El proceso de cálculo para los valores de estas funciones adimensionales vs. los pasos de tiempo, válidos para los cuatro casos de análisis, se muestran en la sección correspondiente al **ANEXO II**.

Lo anterior permitió determinar las amplitudes máximas a partir de cuatro puntos críticos, ubicados en las esquinas superiores de la fundación. En la **Figura 4.7** se ilustra el esquema con la ubicación y numeración de estos cuatro puntos.

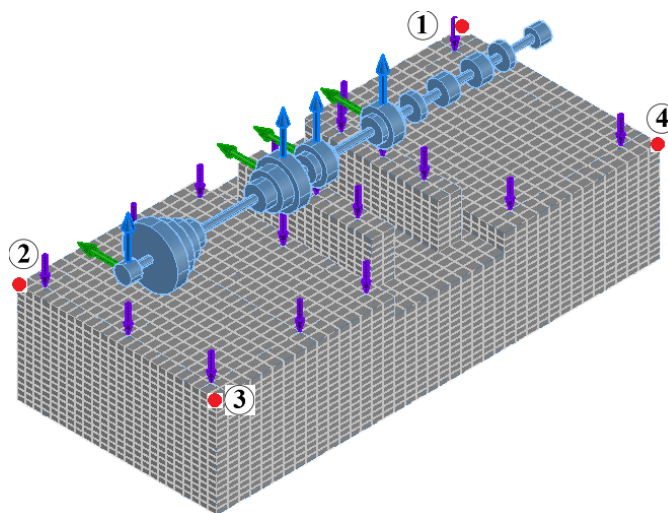


Figura 4.7. Ubicación de cuatro puntos críticos para hallar amplitudes máximas

Fuente: Elaboración Propia

Las amplitudes de desplazamiento vertical para el CASO 1 ($B/H=2$), obtenidas con el programa SAP2000, se presentan en la **Figura 4.8**, donde la amplitud máxima se registra en el punto 3. Los casos restantes se analizaron de manera similar al CASO 1, obteniéndose previamente las amplitudes de desplazamiento vertical en los cuatro puntos críticos, para luego determinar la amplitud máxima. Se procedió de forma análoga para las demás direcciones de desplazamiento, es decir, tanto en la dirección x como en y .



Figura 4.8. Amplitudes verticales obtenidas del MEF (CASO 1)

Fuente: Elaboración Propia

4.3 RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

4.3.1 Frecuencias naturales de vibración en los modos respectivos

Las tablas (**Tabla 4.2** a **Tabla 4.5**) muestran los resultados obtenidos de las frecuencias naturales en los 6 primeros modos de vibración y de acuerdo al caso de análisis, donde las celdas resaltadas en amarillo corresponden aquellas frecuencias en resonancia con la frecuencia de excitación de la máquina $f = 7.50 [Hz]$, también se ha empleado la siguiente nomenclatura para identificar el método de análisis:

MCL = Método de análisis dinámico clásico y con formulación de Lagrange.

MRM = Método de análisis dinámico por medio de la respuesta modal.

MID = Método de análisis dinámico por integración directa.

MEF = Método de análisis dinámico por elementos finitos.

Tabla 4.2. Frecuencias naturales en Hz según método de análisis (CASO 1)

CASO 1 (B/H=2)	f_y	f_x	f_z	f_θ	f_ψ	f_ϕ
Método	1	2	3	4	5	6
MCL	4.84	5.28	5.54	9.08	9.64	11.44
MRM	4.84	5.29	5.54	9.03	9.64	11.44
MEF	4.83	5.26	5.55	9.06	9.67	11.41

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.3. Frecuencias naturales en Hz según método de análisis (CASO 2)

CASO 2 (B/H=3)	f_y	f_x	f_z	f_θ	f_ψ	f_ϕ
Método	1	2	3	4	5	6
MCL	5.68	6.01	6.10	9.65	9.79	11.98
MRM	5.68	6.03	6.10	9.56	9.79	11.98
MEF	5.66	5.94	6.17	9.64	9.85	11.96

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.4. Frecuencias naturales en Hz según método de análisis (CASO 3)

CASO 3 (B/H=4)	f_y	f_x	f_z	f_θ	f_ψ	f_ϕ
Método	1	2	3	4	5	6
MCL	6.23	6.48	6.50	10.13	9.90	12.31
MRM	6.23	6.52	6.50	9.97	9.90	12.31
MEF	6.20	6.37	6.62	9.99	10.11	12.30

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 4.5. Frecuencias naturales en Hz según método de análisis (CASO 4)

CASO 4 (B/H=6)	f_y	f_x	f_z	f_θ	f_ψ	f_ϕ
Método	1	2	3	4	5	6
MCL	6.92	7.07	7.03	10.83	10.06	12.70
MRM	6.92	7.15	7.03	10.58	10.06	12.70
MEF	6.87	6.89	7.22	10.21	10.81	12.72

Fuente: Elaboración Propia

En todos los casos y modos, las frecuencias obtenidas por los métodos MCL y MRM son muy similares, lo que permite promediarlas para representar a los métodos analíticos (MA). Estas frecuencias muestran buena concordancia con las obtenidas mediante el

método de elementos finitos (MEF), y en los modos resonantes coinciden perfectamente entre ambos enfoques, validando así la consistencia de los resultados.

4.3.2 Amplitudes máximas en las esquinas superiores de la fundación

En la **Tabla 4.6** se muestran las amplitudes máximas de desplazamiento traslacional en las tres direcciones (x, y, z) obtenidas de las esquinas de la parte superior del sistema de fundación, según el método correspondiente y de acuerdo al caso de análisis. Las celdas resaltadas en amarillo, son las amplitudes que no cumplen con la amplitud admisible $\Delta_{lim} = 95 [\mu s]$, tomada como referencia en función a la velocidad de operación de la máquina de la **Tabla 2.2** vista en la sección 2.6.3. Para un manejo adecuado en la precisión de los resultados, se han empleado a la unidad de micrones como: $\mu s = 10^{-6}[m]$.

Tabla 4.6. Amplitudes máximas de vibración según caso y método de análisis

CASO 1 (B/H=2) Desplazamiento	MCL	MRM	MID	MEF
$\Delta x_{f_m\acute{a}x} [\mu s]$	9.37	5.11	3.89	4.98
$\Delta y_{f_m\acute{a}x} [\mu s]$	76.16	65.10	93.23	76.10
$\Delta z_{f_m\acute{a}x} [\mu s]$	78.52	73.43	85.52	83.81
CASO 2 (B/H=3) Desplazamiento	MCL	MRM	MID	MEF
$\Delta x_{f_m\acute{a}x} [\mu s]$	8.82	6.03	4.27	5.20
$\Delta y_{f_m\acute{a}x} [\mu s]$	119.34	80.29	108.21	96.16
$\Delta z_{f_m\acute{a}x} [\mu s]$	64.74	92.81	109.39	107.00
CASO 3 (B/H=4) Desplazamiento	MCL	MRM	MID	MEF
$\Delta x_{f_m\acute{a}x} [\mu s]$	9.50	6.71	5.13	10.05
$\Delta y_{f_m\acute{a}x} [\mu s]$	81.91	91.77	114.48	108.60
$\Delta z_{f_m\acute{a}x} [\mu s]$	62.81	103.72	119.29	116.10
CASO 4 (B/H=6) Desplazamiento	MCL	MRM	MID	MEF
$\Delta x_{f_m\acute{a}x} [\mu s]$	10.12	7.62	9.89	13.34
$\Delta y_{f_m\acute{a}x} [\mu s]$	97.82	106.61	120.75	124.50
$\Delta z_{f_m\acute{a}x} [\mu s]$	73.02	113.86	125.49	121.50

Fuente: Elaboración Propia

En síntesis, las frecuencias naturales obtenidas por los métodos MCL y MRM presentan diferencias mínimas, lo que permite promediarlas para representar a los métodos analíticos (MA). Estas frecuencias muestran una buena concordancia con las obtenidas mediante el método de elementos finitos (MEF), especialmente en los modos resonantes, donde coinciden entre ambos enfoques. Esto valida la consistencia y fiabilidad del análisis dinámico realizado y permite agrupar los métodos analíticos para su comparación directa con el MEF en los análisis posteriores.

Respecto a las amplitudes máximas de desplazamiento, a partir del CASO 2 se observa que superan el límite admisible de 95 micrones, lo cual es esperado en fundaciones flexibles. En particular, los desplazamientos máximos en dirección vertical ($\Delta z_{f_m\acute{a}x}$), obtenidos con el método de elementos finitos, disminuyen a medida que aumenta el espesor de la fundación, desde 121.50 micrones en el CASO 4 hasta 83.81 micrones en el CASO 1, lo que indica una mayor rigidez estructural.

De forma similar, el desplazamiento en dirección lateral ($\Delta y_{f_m\acute{a}x}$) se reduce de 124.50 micrones a 76.10 micrones en el mismo intervalo de espesores. Por su parte, el desplazamiento en la dirección longitudinal ($\Delta x_{f_m\acute{a}x}$) se mantiene por debajo del límite admisible en todos los casos. Estas tendencias sugieren la existencia de un espesor límite a partir del cual los métodos analíticos y el método de elementos finitos ofrecen resultados comparables, lo que justifica el análisis comparativo y la discusión técnica que se presentan en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO V

COMPARACIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1 ANÁLISIS COMPARATIVO

Se han efectuado los análisis comparativos para las frecuencias naturales de vibración de los métodos analíticos (MA), entre los resultados del método por elementos finitos (MEF). También se realizaron los siguientes análisis comparativos para las amplitudes máximas:

- Método clásico y con formulación de Lagrange (MCL) / Método por elementos finitos (MEF).
- Método de la respuesta modal (MRM) / Método por elementos finitos (MEF).
- Método por integración directa (MID) / Método por elementos finitos (MEF).

5.1.1 Comparación de las frecuencias naturales de vibración

Las tablas (**Tabla 5.1** a **Tabla 5.4**) muestran los valores promedio entre las frecuencias de los métodos MCL y MRM que representan a los MA. También se muestran las diferencias entre los MA y los resultados obtenidos por el MEF según el caso de análisis.

Tabla 5.1. Comparación de frecuencias naturales entre los MA y el MEF (CASO 1)

CASO 1 (B/H=2)	f_y	f_x	f_z	f_θ	f_ψ	f_ϕ
Método	1	2	3	4	5	6
MA	4.84	5.29	5.54	9.06	9.64	11.44
MEF	4.83	5.26	5.55	9.06	9.67	11.41
Diferencia [%]	0.21	0.47	0.18	0.06	0.31	0.26

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 5.2. Comparación de frecuencias naturales entre los MA y el MEF (CASO 2)

CASO 2 (B/H=3)	f_y	f_x	f_z	f_θ	f_ψ	f_ϕ
Método	1	2	3	4	5	6
MA	5.68	6.02	6.10	9.61	9.79	11.98
MEF	5.66	5.94	6.17	9.64	9.85	11.96
Diferencia [%]	0.35	1.33	1.15	0.36	0.61	0.17

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 5.3. Comparación de frecuencias naturales entre los MA y el MEF (CASO 3)

CASO 3 (B/H=4)	f_y	f_x	f_z	f_θ	f_ψ	f_ϕ
Método	1	2	3	4	5	6
MA	6.23	6.50	6.50	10.05	9.90	12.31
MEF	6.20	6.37	6.62	9.99	10.11	12.30
Diferencia [%]	0.48	2.00	1.85	0.60	2.12	0.08

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 5.4. Comparación de frecuencias naturales entre los MA y el MEF (CASO 4)

CASO 4 (B/H=6)	f_y	f_x	f_z	f_θ	f_ψ	f_ϕ
Método	1	2	3	4	5	6
MA	6.92	7.11	7.03	10.71	10.06	12.70
MEF	6.87	6.89	7.22	10.21	10.81	12.72
Diferencia [%]	0.72	3.09	2.70	4.62	7.46	0.16

Fuente: Elaboración Propia

Las comparaciones mostradas en las tablas anteriores indicaron lo siguiente:

CASO 1 (B/H=2):

- La frecuencia en el modo traslacional 3 (f_z) muestra una diferencia mínima del 0.18%, siendo la diferencia para los otros modos traslacionales 1 y 2 (f_y y f_x) de 0.21% y 0.47% respectivamente.
- Las diferencias para las frecuencias en los modos rotaciones correspondientes a 4, 5 y 6 (f_θ , f_ψ y f_ϕ) son de apenas 0.06%, 0.31% y 0.26%, obteniéndose la menor diferencia en el modo 4 de balanceo.

CASO 2 (B/H=3):

- La frecuencia en el modo traslacional 3 (f_z), presenta una diferencia del 1.15%, lo que supone un aumento moderado respecto al caso anterior, mientras que las diferencias en los modos 1 y 2 son del 0.35% y 1.33%, mostrando incrementos consistentes en comparación con el caso previo.
- Para los modos rotacionales, la diferencia de frecuencia en el modo 4 (f_θ) es de 0.36%, un poco mayor al caso anterior, mientras que los modos rotacionales 5 y 6

presentan diferencias del 0.61% y 0.17%, respectivamente, reflejando un aumento y una disminución para estos modos en comparación con el caso previo.

CASO 3 (B/H=4):

- En este caso la frecuencia en el modo traslacional 3 (f_z), presenta una diferencia del 1.85%, reflejando un leve aumento respecto a los casos anteriores. Para los otros modos traslacionales 1 y 2, las diferencias son del 0.48% y 2.00%, con incrementos más notorios que en los casos previos.
- La diferencia en la frecuencia para el modo rotacional 4 (f_θ) es del 0.60%, indicando un aumento leve respecto al caso anterior. Los modos rotacionales 5 y 6 presentan diferencias del 2.12% y 0.08%, mostrando que comienzan a aparecer contrastes mayores en algunos modos respecto a los casos anteriores.

CASO 4 (B/H=6):

- La frecuencia en el modo traslacional 3 (f_z), presenta una diferencia del 2.70%, con un aumento significativo respecto a los casos previos, mientras que para los modos 1 y 2, las diferencias son 0.72% y 3.09%, reflejando un leve incremento y un aumento notable en comparación con el caso anterior.
- Para la frecuencia en el modo rotacional 4 (f_θ) la diferencia es del 4.62%, mostrando un incremento notable respecto a casos anteriores, mientras que los modos 5 y 6 presentan diferencias del 7.46% y 0.16%, reflejando aumentos en variación respecto al caso previo.

5.1.2 Comparación de las amplitudes máximas de vibración

En las tablas (**Tabla 5.5** a **Tabla 5.7**) se muestran las diferencias entre los métodos analíticos (MCL, MRM y MID) y los resultados obtenidos por el MEF para las máximas amplitudes, que fueron obtenidas de las esquinas de la parte superior del sistema de fundación, según al caso de análisis generado por la variación del espesor. Debido a la mayor precisión aportada por MEF, sus valores se consideraron de referencia al calcular los errores entre los métodos analíticos.

Tabla 5.5. Comparación de amplitudes máximas entre el MCL y el MEF

CASO 1 (B/H=2) Método	$\Delta x_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta y_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta z_{f_m\acute{a}x}$	CASO 2 (B/H=3) Método	$\Delta x_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta y_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta z_{f_m\acute{a}x}$
MCL	9.37	76.16	78.52	MCL	8.82	119.34	64.74
MEF	4.98	76.10	83.81	MEF	5.20	96.16	107.00
Diferencia [%]	88.15	0.08	6.31	Diferencia [%]	69.62	24.11	39.50

CASO 3 (B/H=4) Método	$\Delta x_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta y_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta z_{f_m\acute{a}x}$	CASO 4 (B/H=6) Método	$\Delta x_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta y_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta z_{f_m\acute{a}x}$
MCL	9.50	81.91	62.81	MCL	10.12	97.82	73.02
MEF	10.05	108.60	116.10	MEF	13.34	124.50	121.50
Diferencia [%]	5.47	24.58	45.90	Diferencia [%]	24.14	21.43	39.90

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 5.6. Comparación de amplitudes máximas entre el MRM y el MEF

CASO 1 (B/H=2) Método	$\Delta x_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta y_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta z_{f_m\acute{a}x}$	CASO 2 (B/H=3) Método	$\Delta x_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta y_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta z_{f_m\acute{a}x}$
MRM	5.11	65.10	73.43	MRM	6.03	80.29	92.81
MEF	4.98	76.10	83.81	MEF	5.20	96.16	107.00
Diferencia [%]	2.61	14.45	12.39	Diferencia [%]	15.96	16.50	13.26

CASO 3 (B/H=4) Método	$\Delta x_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta y_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta z_{f_m\acute{a}x}$	CASO 4 (B/H=6) Método	$\Delta x_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta y_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta z_{f_m\acute{a}x}$
MRM	6.71	91.77	103.72	MRM	7.62	106.61	113.86
MEF	10.05	108.60	116.10	MEF	13.34	124.50	121.50
Diferencia [%]	33.23	15.50	10.66	Diferencia [%]	42.88	14.37	6.29

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 5.7. Comparación de amplitudes máximas entre el MID y el MEF

CASO 1 (B/H=2) Método	$\Delta x_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta y_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta z_{f_m\acute{a}x}$	CASO 2 (B/H=3) Método	$\Delta x_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta y_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta z_{f_m\acute{a}x}$
MID	3.89	93.23	85.52	MID	4.27	108.21	109.39
MEF	4.98	76.10	83.81	MEF	5.20	96.16	107.00
Diferencia [%]	21.89	22.51	2.04	Diferencia [%]	17.88	12.53	2.23

CASO 3 (B/H=4) Método	$\Delta x_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta y_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta z_{f_m\acute{a}x}$	CASO 4 (B/H=6) Método	$\Delta x_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta y_{f_m\acute{a}x}$	$\Delta z_{f_m\acute{a}x}$
MID	5.13	114.48	119.29	MID	9.89	120.75	125.49
MEF	10.05	108.60	116.10	MEF	13.34	124.50	121.50
Diferencia [%]	48.96	5.41	2.75	Diferencia [%]	25.86	3.01	3.28

Fuente: Elaboración Propia

Las comparaciones realizadas en las tablas anteriores mostraron lo siguiente:

Comparación MCL vs. MEF:

- La diferencia de amplitud máxima en la dirección **x**, disminuye desde el 88.15% para el CASO 1 (B/H=2) hasta el 24.14% para el CASO 4 (B/H=6).
- Para la amplitud máxima en la dirección **y**, las diferencias varían desde el 0.08% para el CASO 1 (B/H=2) hasta 21.43% para el CASO 4 (B/H=6), mostrando una tendencia de incremento y disminución.
- La amplitud máxima en la dirección **z**, posee diferencias que van desde el 6.31% para el CASO 1 (B/H=2) alcanzando un valor de 39.90% para el CASO 4 (B/H=6).

Comparación MRM vs. MEF:

- La diferencia de amplitud máxima en la dirección **x**, oscila desde el 2.61% para el CASO 1 (B/H=2), siguiendo una tendencia de incremento y alcanzando un valor máximo de 42.88% para el CASO 4 (B/H=6).
- Para la amplitud máxima en la dirección **y**, las diferencias poseen un rango de variación en incremento y disminución que van desde el 14.45% para el CASO 1 (B/H=2) a 14.37% para el CASO 4 (B/H=6).
- La amplitud máxima en la dirección **z**, posee diferencias que oscilan desde el 12.39% para el CASO 1 (B/H=2) alcanzando un incremento del 13.26% en el CASO 2 (B/H=3) y un valor reducido de 6.29% para el CASO 4 (B/H=6).

Comparación MID vs. MEF:

- Las diferencias encontradas para las amplitudes máximas en la dirección **x**, varían desde el 21.89% para el CASO 1 (B/H=2) hasta un valor ligeramente alto de 25.86% para el CASO 4 (B/H=6).
- Para la amplitud máxima en la dirección **y**, las diferencias poseen una reducción, en un rango de variación del 22.51% para el CASO 1 (B/H=2) a 3.01% para el CASO 4 (B/H=6).
- La amplitud máxima en la dirección **z**, presenta pequeñas diferencias que oscilan desde el 2.04% para el CASO 1 (B/H=2), alcanzando un valor ligeramente alto del 3.28% para el CASO 4 (B/H=6).

5.2 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Las figuras (**Figura 5.1** a **Figura 5.4**) muestran los gráficos de las **frecuencias naturales** de vibración libre para los métodos analíticos (MCL y MRM), así como los resultados obtenidos del método por elementos finitos (MEF) según el caso de análisis.

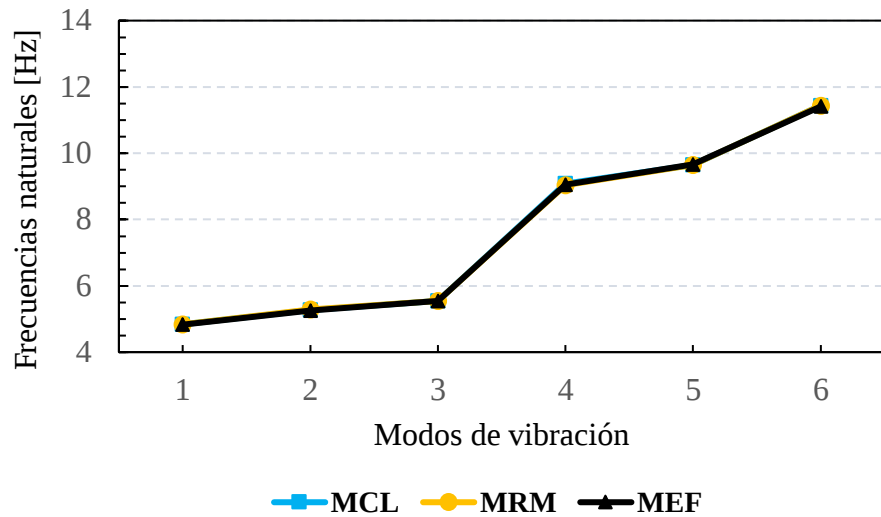


Figura 5.1. Frecuencias naturales en los 6 modos de vibración (CASO 1)

Fuente: Elaboración Propia

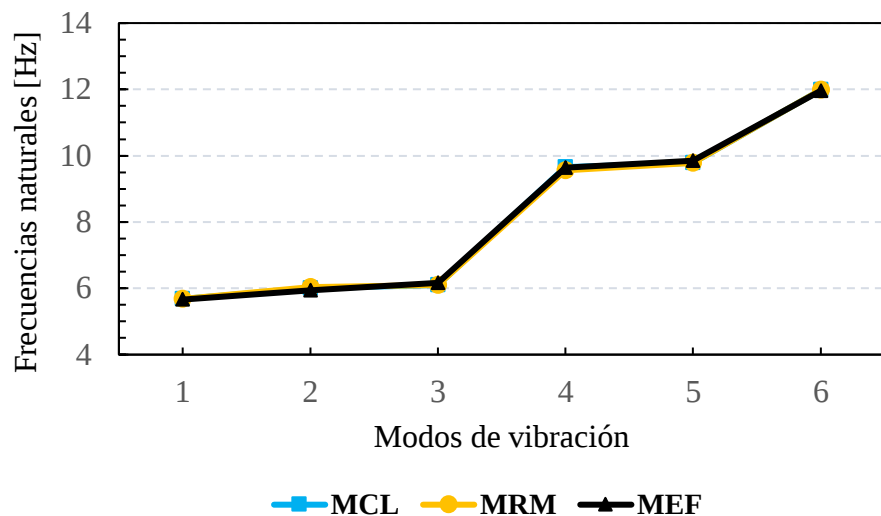


Figura 5.2. Frecuencias naturales en los 6 modos de vibración (CASO 2)

Fuente: Elaboración Propia

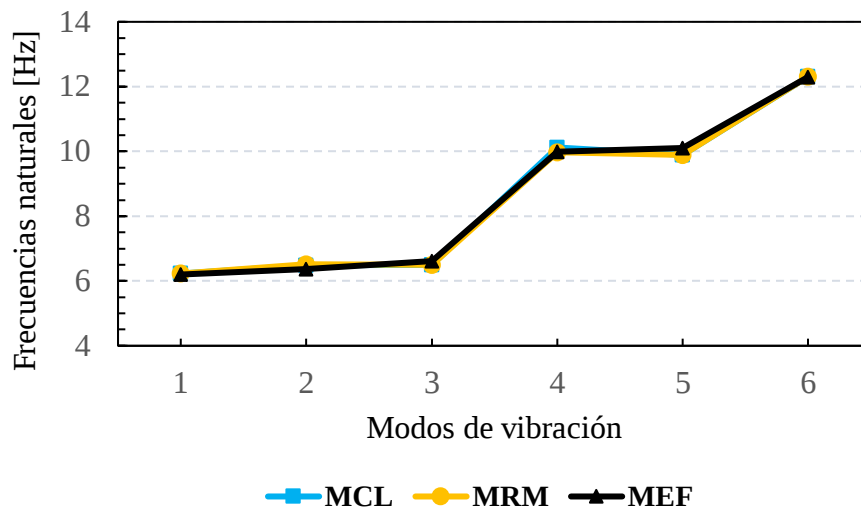


Figura 5.3. Frecuencias naturales en los 6 modos de vibración (CASO 3)

Fuente: Elaboración Propia

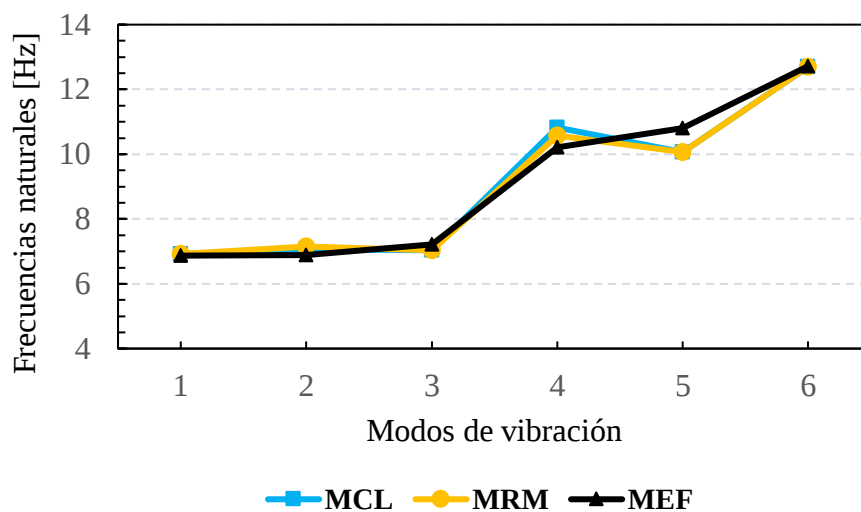


Figura 5.4. Frecuencias naturales en los 6 modos de vibración (CASO 4)

Fuente: Elaboración Propia

De los gráficos anteriores se observa nuevamente que los métodos analíticos (MCL y MRM) presentan resultados muy similares en todos los modos de vibración. El método de elementos finitos (MEF) predice frecuencias naturales ligeramente menores en la mayoría de casos, salvo en el modo 5 (f_ψ), donde los valores son un poco mayores que los métodos analíticos, lo que reafirma su precisión en fundaciones flexibles.

La **Tabla 5.8** resume los resultados obtenidos de la comparación entre las frecuencias naturales de los MA (MCL y MRM) y del MEF, esto para dar una visión general de las diferencias entre ambos métodos a medida que cambia el espesor de la fundación.

Tabla 5.8. Resumen de la diferencia de frecuencias [%] entre los MA y el MEF

Relación B/H	$Dif(f_x)$	$Dif(f_y)$	$Dif(f_z)$	$Dif(f_\phi)$	$Dif(f_\theta)$	$Dif(f_\psi)$
2	0.47	0.21	0.18	0.26	0.06	0.31
3	1.33	0.35	1.15	0.17	0.36	0.61
4	2.00	0.48	1.85	0.08	0.60	2.12
6	3.09	0.72	2.70	0.16	4.62	7.46

Fuente: Elaboración Propia

Con la determinación de las diferencias para las frecuencias naturales, se han desarrollado dos gráficos para visualizar los mismos, uno que muestra las diferencias de frecuencia en los grados de libertad de traslación y otro referido a los de rotación (véase **Figura 5.5** y **Figura 5.6**). En el eje x se han considerado a los valores de las relaciones B/H, mientras que en el eje y se han representado a las diferencias encontradas entre los MA y el MEF.

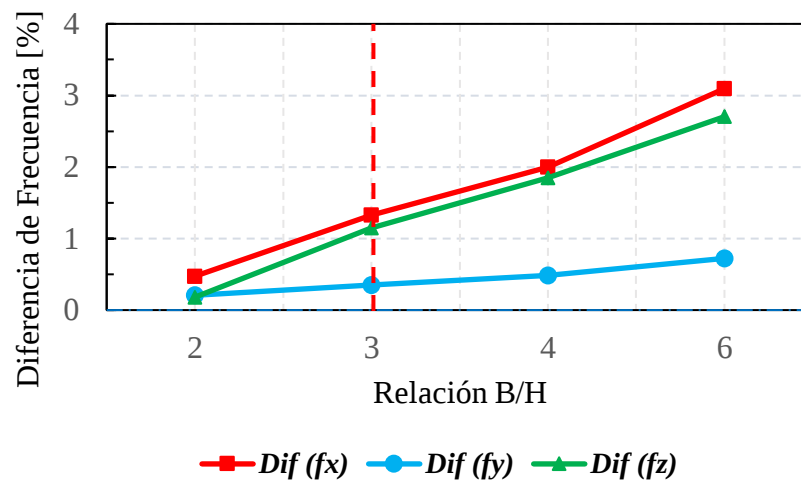


Figura 5.5. Diferencias de frecuencias de traslación vs. relación B/H

Fuente: Elaboración Propia

De la figura anterior se observa que las diferencias en todos los modos aumentan conforme crece la relación de rigidez relativa B/H. La diferencia es mínima en el CASO 1 (B/H=2)

(relación de ancho/espesor final de diseño). Hasta el CASO 2 ($B/H=3$), las diferencias en todos los modos son inferiores al 2%. A partir del CASO 3 ($B/H=4$) las diferencias crecen más notablemente.

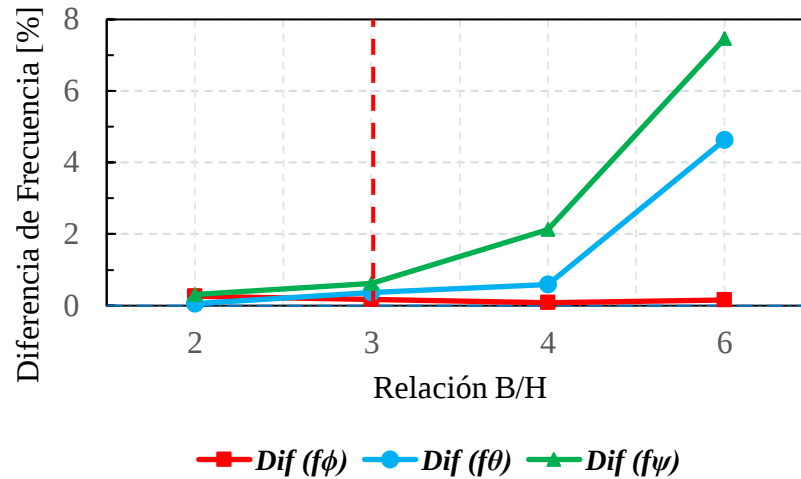


Figura 5.6. Diferencias de frecuencias de rotación vs. relación B/H

Fuente: Elaboración Propia

Para las frecuencias rotacionales se observa que todas presentan diferencias un poco bajas que las traslacionales, evidenciándose mayores discrepancias a medida que B/H crece.

Al analizar las diferencias, se aprecia que hasta el **CASO 2 ($B/H=3$)** las discrepancias en todos los modos rotacionales son menores al 2%, y, siendo conservadores, puede identificarse un **espesor límite** en este caso, donde ambos enfoques muestran resultados similares; sin embargo, a partir del CASO 3, la teoría del cuerpo rígido perdería precisión.

Para efectuar el análisis de los resultados enfocados en las **amplitudes máximas** de desplazamiento, estas también han sido graficadas tanto para los MA, así como para el MEF según el caso de análisis respectivo (véase **Figura 5.7** a **Figura 5.10**).

Como era de esperarse, las amplitudes máximas de desplazamiento van en aumento a medida que se reduce el espesor de la fundación y se puede ver que para la geometría rígida del CASO 1 ($B/H=2$) donde se ha establecido el espesor final de diseño de la fundación, todos los métodos cumplen con la amplitud permisible de $\Delta_{lim} = 95 [\mu s]$.

También se ha observado que en el método MCL las amplitudes máximas no siguen una tendencia de incremento en todas las direcciones a medida que la relación B/H aumenta por la reducción del espesor de la fundación en comparación con los demás métodos. Esta sensibilidad ante variaciones en el espesor de la fundación, demostraría que las simplificaciones consideradas en la formulación para el cálculo de amplitudes vistas en la sección 2.3.2, no serían las más apropiadas para analizar fundaciones flexibles.

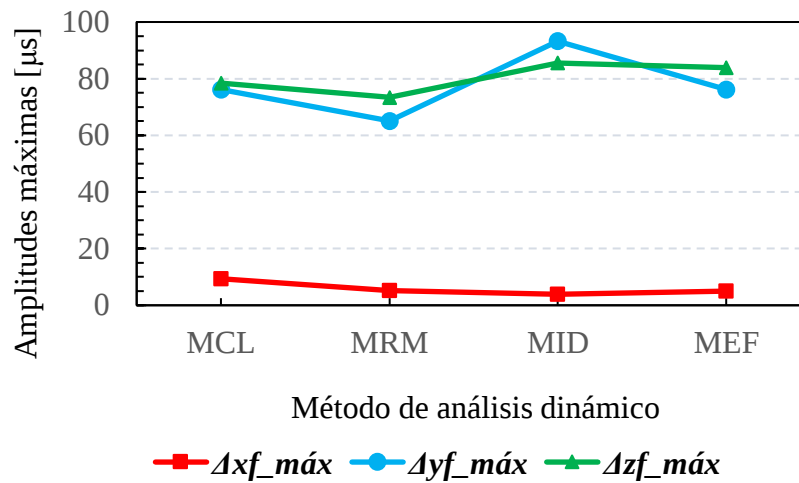


Figura 5.7. Amplitudes máximas vs. métodos de análisis (CASO 1)

Fuente: Elaboración Propia

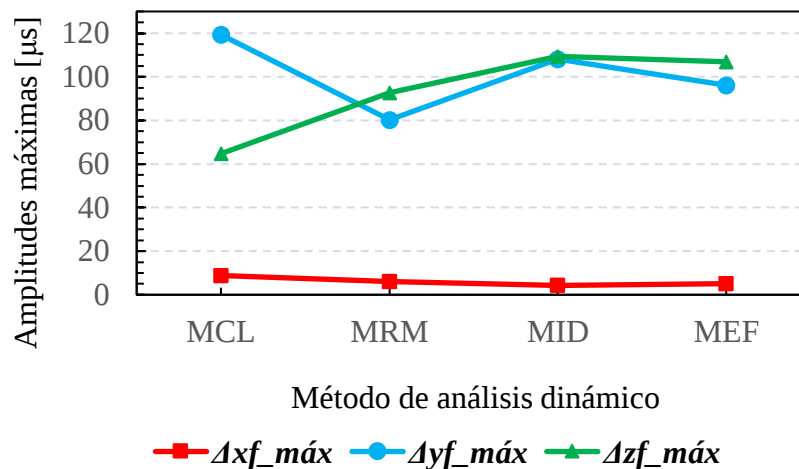


Figura 5.8. Amplitudes máximas vs. métodos de análisis (CASO 2)

Fuente: Elaboración Propia

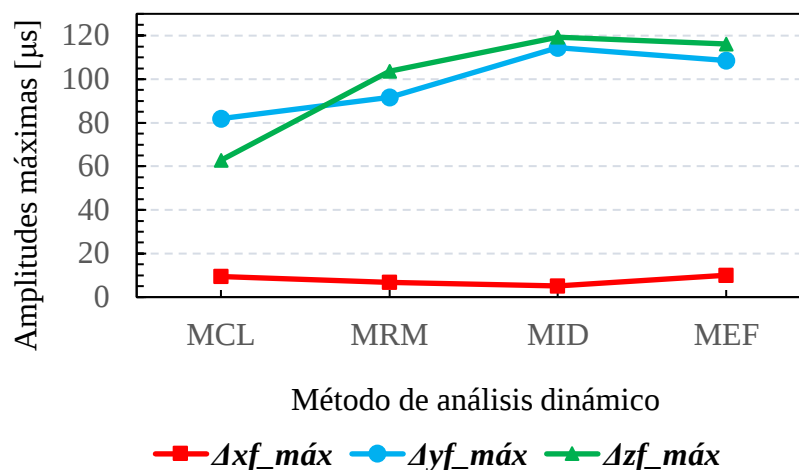


Figura 5.9. Amplitudes máximas vs. métodos de análisis (CASO 3)

Fuente: Elaboración Propia

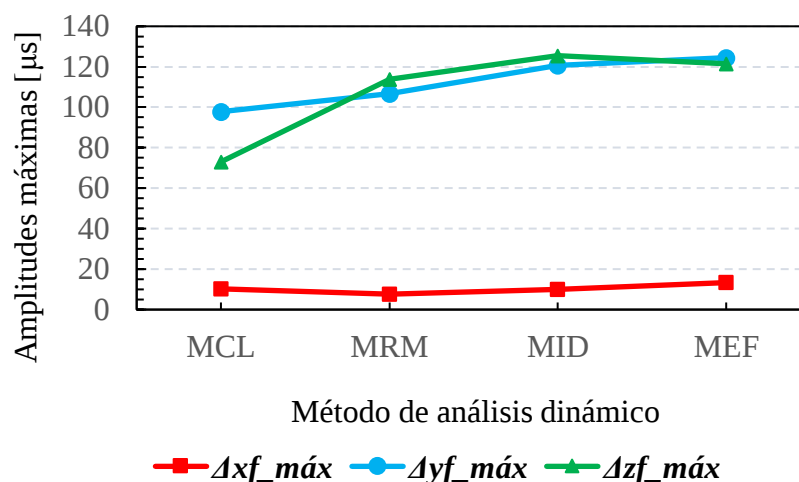


Figura 5.10. Amplitudes máximas vs. métodos de análisis (CASO 4)

Fuente: Elaboración Propia

Para ilustrar mejor las **diferencias encontradas en las amplitudes máximas** de vibración entre los métodos analíticos (MCL, MRM y MID) y el MEF, se han realizado un resumen en las tablas (**Tabla 5.9** a **Tabla 5.11**) para cada caso de análisis, así como gráficos (véase **Figura 5.11** a **Figura 5.13**). Los resultados encontrados sugieren que, si bien el MEF proporciona resultados precisos, los métodos analíticos pueden ofrecer estimaciones razonables, específicamente cuando se emplean los métodos MRM y el MID.

Tabla 5.9. Resumen diferencia de amplitud máxima [%] entre el MCL y el MEF

CASO	Relación B/H	$Dif(\Delta x_{f_{máx}})$	$Dif(\Delta y_{f_{máx}})$	$Dif(\Delta z_{f_{máx}})$
1	2	88.15	0.08	6.31
2	3	69.62	24.11	39.50
3	4	5.47	24.58	45.90
4	6	24.14	21.43	39.90

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 5.10. Resumen diferencia de amplitud máxima [%] entre el MRM y el MEF

CASO	Relación B/H	$Dif(\Delta x_{f_{máx}})$	$Dif(\Delta y_{f_{máx}})$	$Dif(\Delta z_{f_{máx}})$
1	2	2.61	14.45	12.39
2	3	15.96	16.50	13.26
3	4	33.23	15.50	10.66
4	6	42.88	14.37	6.29

Fuente: Elaboración Propia

Tabla 5.11. Resumen diferencia de amplitud máxima [%] entre el MID y el MEF

CASO	Relación B/H	$Dif(\Delta x_{f_{máx}})$	$Dif(\Delta y_{f_{máx}})$	$Dif(\Delta z_{f_{máx}})$
1	2	21.89	22.51	2.04
2	3	17.88	12.53	2.23
3	4	48.96	5.41	2.75
4	6	25.86	3.01	3.28

Fuente: Elaboración Propia

Al efectuarse comparaciones en términos de precisión, se pueden indicar lo siguiente:

- **MEF vs. MCL:** El MCL presenta diferencias de amplitud altas incluso para la geometría rígida en dirección x , así como en las direcciones de los ejes y ; z para relaciones B/H mayores a 3, lo que indica menor precisión comparado con el MEF.
- **MEF vs. MRM:** El MRM muestra diferencias de amplitud bajas a moderadas, especialmente para B/H=3, indicando una buena precisión en estos casos.
- **MEF vs. MID:** El MID es el más cercano al MEF con diferencias moderadas a bajas en las direcciones x , y , z , especialmente en B/H=3, sugiriendo alta precisión.

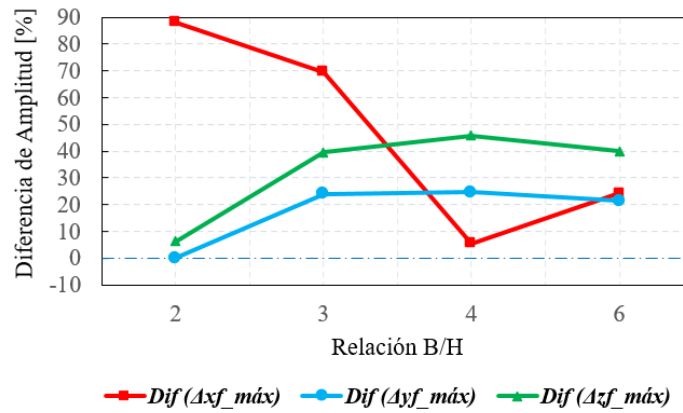


Figura 5.11. Diferencia de amplitudes máximas vs. relación B/H (MCL/MEF)

Fuente: Elaboración Propia

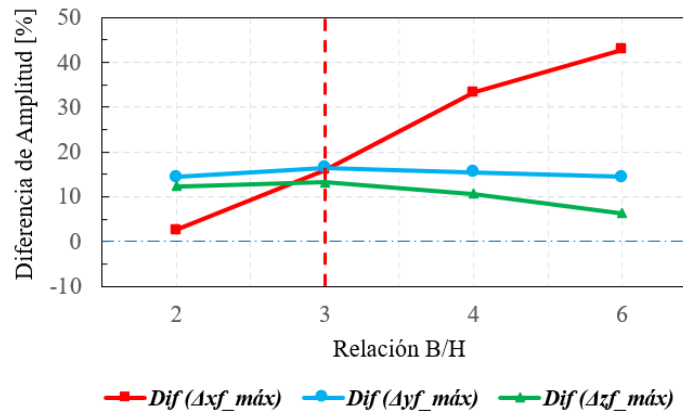


Figura 5.12. Diferencia de amplitudes máximas vs. relación B/H (MRM/MEF)

Fuente: Elaboración Propia

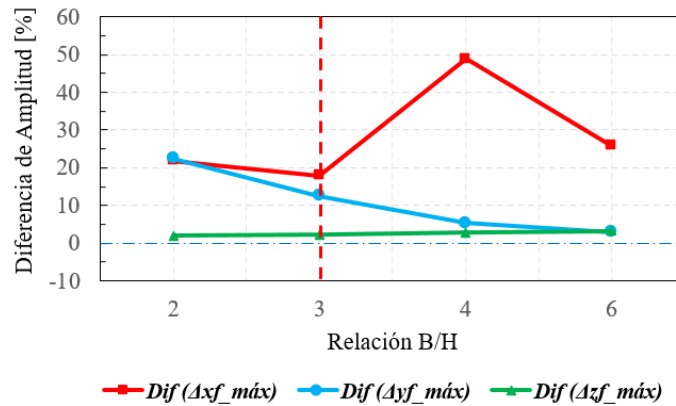


Figura 5.13. Diferencia de amplitudes máximas vs. relación B/H (MID/MEF)

Fuente: Elaboración Propia

Al observar las diferencias en amplitudes máximas de las tablas y gráficos presentadas anteriormente, se evidencia que el MRM presenta buena aproximación con el MEF hasta la **rigidez relativa $B/H=3$ (CASO 2)**. En cambio, el MCL muestra grandes discrepancias incluso en geometrías rígidas para la dirección x . Por su parte, el MID mantiene concordancia similar al MRM hasta esa rigidez, pero presenta discrepancias crecientes en dirección x cuando la fundación se hace más flexible.

En base a lo anterior, la **Tabla 5.12** y la **Figura 5.14** muestran un resumen de las diferencias de amplitud máxima en la dirección z entre los métodos analíticos (MA) y el MEF. Se observa que las discrepancias en el MRM y el MID disminuyen con el aumento de B/H , evidenciando mejor ajuste en fundaciones más flexibles. Por el contrario, el MCL se aleja progresivamente, siendo su mejor aproximación únicamente en la relación $B/H=2$.

Tabla 5.12. Resumen diferencia de amplitud máxima en z [%] entre MA y el MEF

CASO	Relación B/H	MCL / MEF	MRM / MEF	MID / MEF
		$Dif_1 (\Delta z_{f_máx})$	$Dif_2 (\Delta z_{f_máx})$	$Dif_3 (\Delta z_{f_máx})$
1	2	6.31	12.39	2.04
2	3	39.50	13.26	2.23
3	4	45.90	10.66	2.75
4	6	39.90	6.29	3.28

Fuente: Elaboración Propia

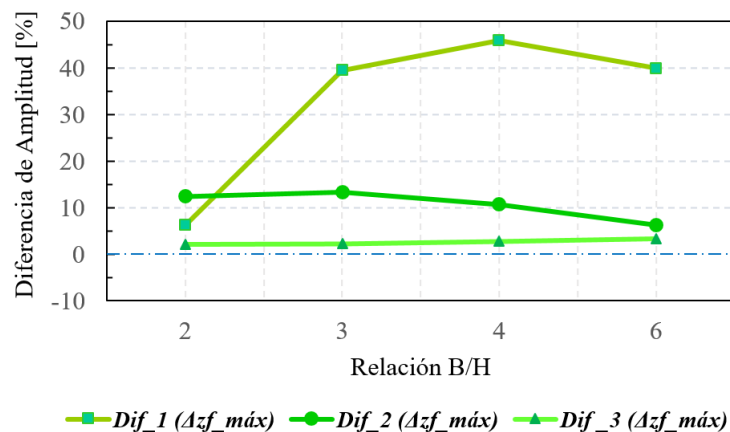


Figura 5.14. Diferencia de amplitud máxima en z vs. relación B/H (MA/MEF)

Fuente: Elaboración Propia

El análisis de las máximas amplitudes de desplazamiento en dirección z revela que tanto el MRM como el MID mantienen una buena aproximación respecto al MEF, especialmente a medida que la fundación se hace más flexible. En el CASO 1 ($B/H=2$), todas las diferencias son inferiores al 13 %, destacando la precisión del MID (2.04 %). Conforme la relación B/H aumenta, el MRM mejora progresivamente, alcanzando una menor variación en el CASO 4 ($B/H=6$), con una diferencia de solo 6.29 %. En contraste, el MCL presenta divergencias crecientes, superando el 45 % en el CASO 3 ($B/H=4$), por lo que resulta menos confiable para fundaciones con menor rigidez estructural.

A partir del análisis de los resultados, se destacan los siguientes puntos de discusión:

El MEF reproduce adecuadamente la influencia de la flexibilidad del suelo en los seis modos de vibración cuando se modela correctamente, mostrando buena concordancia con los métodos analíticos. Las discrepancias aumentan conforme la relación B/H se incrementa, especialmente en torsión, coincidiendo con Bhatia (2008a), quien señala que la flexibilidad del suelo gobierna la respuesta dinámica de la cimentación.

En los cálculos analíticos para las funciones de impedancia dinámica, se pudo evidenciar que la amortiguación del suelo incrementa a medida que se profundiza el empotramiento de la fundación en el suelo. Esto concuerda con lo estudiado por Jafarzadeh y Asadinik (2008), quienes afirman que la amortiguación aumentó significativamente con el empotramiento de sus modelos, afectando el comportamiento del sistema.

En los modelos analizados, la rigidez dinámica del sistema, reflejada en el aumento de las frecuencias naturales, crece al reducirse el espesor del cimient, lo que incrementa la relación B/H y disminuye el empotramiento. Esto concuerda con Jafarzadeh y Ghasemzade Mashhadi (2009), quienes observaron que dicha rigidez disminuye al aumentar el empotramiento, afectando la respuesta vibratoria.

Los estudios de Porto et al. (2012) reportaron que la rigidez del suelo influye significativamente en la respuesta de las cimentaciones. Esto coincide con los resultados de la presente investigación, donde las variaciones en las impedancias dinámicas,

ocasionadas por cambios en la profundidad de empotramiento, afectan las frecuencias naturales y las amplitudes de vibración del sistema.

La investigación de Abbas et al. (2017) señala que la omisión del modelado por elementos finitos puede llevar a sobreestimaciones en la rigidez de la cimentación. En este estudio, las frecuencias naturales calculadas por el MEF y los métodos analíticos son casi idénticas, excepto en torsión. Sin embargo, el MEF muestra amplitudes menores, indicando que los métodos analíticos pueden ser más conservadores en geometrías flexibles ($B/H > 3$).

Las discrepancias encontradas en las máximas amplitudes de vibración en las direcciones laterales pueden deberse a la irregularidad geométrica del sistema de fundación causada por la presencia de pedestales de soporte para la máquina. Esta situación guarda relación con lo que sostienen Ali y Mahamid (2018), quienes reportan cambios en la respuesta dinámica debido a la geometría de los pedestales en un bloque de fundación.

En los casos estudiados, se observó que el aumento en la profundidad de empotramiento produjo una reducción en las amplitudes de vibración. Esto coincide con Tandon et al. (2019), quienes mediante modelos a escala y la teoría del semiespacio elástico de Veletsos y Verbič lograron obtener resultados teóricos y experimentales muy similares, confirmando la influencia significativa del empotramiento en la respuesta dinámica y el comportamiento vibratorio del sistema de cimentación.

El MEF ofrece resultados más precisos que los métodos analíticos, especialmente para fundaciones flexibles con relaciones $B/H > 3$ y con geometrías relativamente complejas. Esto guarda cierta relación con lo que sostienen Giorgetti et al. (2021), quienes señalan la capacidad del MEF para diseños detallados donde se requiere una mejor captura de las frecuencias, sobre todo para relaciones $B/H > 5$.

Las diferencias en las frecuencias naturales para el modo de traslación vertical (dirección z) varían entre 0.18% y 2.70%, siendo los valores analíticos casi idénticos a los calculados por el método de elementos finitos (MEF). Este comportamiento concuerda con Dhut et al. (2021), quienes reportaron que la variación entre frecuencias naturales verticales

calculadas manualmente y mediante el MEF es casi insignificante. Además, indican que el método del semiespacio elástico, propuesto por Richart y Whitman, tiende a ser más conservador que el MEF al estimar las frecuencias naturales.

Las diferencias obtenidas en las frecuencias naturales de vibración para los modos de rotación varían entre 0.06% y 7.46%, siendo estas diferencias relativamente pequeñas. En lo que respecta a las amplitudes de desplazamiento, el MEF muestra valores ligeramente inferiores respecto a los métodos analíticos, particularmente en el MID, lo que sugiere que este último es más conservador. Este comportamiento es respaldado por Desai et al. (2022), quienes indican variaciones en las frecuencias rotacionales de hasta un 10%, además de amplitudes más elevadas al aplicar métodos analíticos frente al MEF. En consecuencia, modelar fundaciones para máquinas mediante el MEF conduce a resultados menos conservadores en amplitudes, aunque con frecuencias naturales razonablemente consistentes.

El análisis confirma que la rigidez relativa (B/H) controla el desempeño dinámico de la fundación, pues condiciona la masa, la rigidez y el amortiguamiento del sistema a través de las funciones de impedancia en suelos cohesivos. En este contexto, los métodos analíticos como el MCL resultan confiables únicamente en configuraciones rígidas, mientras que el MEF evidencia una mayor capacidad para representar efectos de flexibilidad e irregularidad geométrica.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 CONCLUSIONES

El presente trabajo de tesis tuvo por objetivo, realizar el análisis dinámico comparativo de una fundación para turbina a gas, mediante métodos analíticos y elementos finitos con funciones de impedancia en suelo cohesivo. Para ello, se realizaron cuatro análisis dinámicos de una fundación de bloque combinado embebido en el suelo y para una máquina centrífuga (turbina a gas), empleando la teoría clásica con formulación de Lagrange (MCL), respuesta modal (MRM), integración directa (MID) y el análisis por el método elementos finitos (MEF). Estos análisis fueron realizados mediante programas desarrollados en Mathcad Prime para los métodos analíticos y SAP2000 para el análisis por elementos finitos. Se consideraron cuatro casos de estudio, cada uno con la reducción en el espesor del cimiento. De estos estudios, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Basado en los resultados obtenidos del análisis dinámico de fundaciones para turbinas a gas sobre suelos cohesivos, se acepta la hipótesis propuesta. Al aplicar funciones de impedancia, se comprobó que los métodos analíticos y el método de elementos finitos arrojan resultados comparables mientras el espesor del cimiento se mantiene dentro de un rango determinado (fundaciones relativamente rígidas, con $B/H \leq 3$). Al superarse el criterio límite de rigidez relativa ($B/H=3$), surgen diferencias significativas, especialmente en las amplitudes de desplazamiento en dirección x , sin embargo, en las otras direcciones los métodos MRM y MID mantienen una buena aproximación y el MCL pierde precisión de forma notable.
- El diseño de fundaciones se optimiza al combinar el MEF en análisis detallados con métodos analíticos en la fase conceptual. Se conectó rígidamente el perímetro de la base al centro de rigidez, aplicando impedancias dinámicas equivalentes en los seis grados de libertad. Este modelado mejoró la representación dinámica respecto al enfoque nodal convencional, reduciendo las discrepancias en las frecuencias naturales. En los modos traslacionales, las diferencias fueron menores

al 2 % hasta el CASO 2 ($B/H=3$) y en los modos rotacionales, se mantuvieron por debajo del 3 % hasta el CASO 3 ($B/H=4$). Se formularon las ecuaciones de movimiento con Lagrange, obteniendo matrices desacopladas de rigidez y amortiguamiento, coherentes con la implementación en SAP2000. Por otra parte, el estudio del MID permitió seleccionar un paso de tiempo adecuado, mejorando la precisión numérica sin aumentar la complejidad del modelo.

- Los métodos analíticos (MCL y MRM) y el MEF muestran frecuencias naturales muy cercanas, con diferencias inferiores al 2 % hasta el CASO 2 ($B/H=3$) y menores al 8 % hasta el CASO 4 ($B/H=6$), siempre que en el modelado por el MEF sea adecuado y preciso. Las mayores discrepancias se observan en los modos rotacionales, por lo que, siendo conservadores, a partir de la relación $B/H=3$ los métodos analíticos pierden cierta precisión, limitando su aplicación práctica a fundaciones con geometrías relativamente rígidas.
- Todos los métodos cumplen con el límite permisible de resonancia y amplitud máxima para la geometría rígida del CASO 1 ($B/H=2$). Sin embargo, el MCL no presenta una tendencia clara incluso para el caso rígido y conforme aumenta la relación B/H , evidenciando que sus simplificaciones para calcular amplitudes no son las más adecuadas en análisis dinámicos precisos. Por otro lado, los métodos MRM y MID entregan estimaciones más consistentes, ya que para la relación $B/H=3$, las diferencias con el MEF en las tres direcciones de las amplitudes máximas de desplazamiento son aceptables, sugiriendo convergencia y validando el uso de los métodos analíticos hasta ese grado de rigidez estructural.
- Los estudios realizados confirman que el MEF mejora el modelado dinámico de la interacción Máquina-Fundación-Suelo, especialmente en condiciones donde los métodos analíticos no logran representar completamente las respuestas debido a sus simplificaciones. No obstante, los métodos analíticos continúan proporcionando estimaciones razonables en configuraciones geométricas específicas, como el CASO 2 ($B/H=3$) para los métodos MRM y MID. Asimismo, la aplicación de transformaciones geométricas en el cálculo de amplitudes

máximas para los métodos analíticos, han permitido hallar los desplazamientos en cualquier punto de la fundación, superando la práctica común de restringir estos cálculos únicamente al centroide de la base del sistema de cimentación.

El presente estudio demuestra que la variación del espesor de la cimentación afecta significativamente las amplitudes de desplazamiento, lo que sugiere que una correcta selección de la relación B/H puede mejorar el rendimiento de la máquina, optimizar el volumen del hormigón con la reducción del espesor de la fundación y controlar la posibilidad de resonancia. En este sentido, muchos códigos y normativas internacionales sugieren una relación de peso entre la fundación y la máquina igual a 3, con el objetivo de evitar posibles estados de resonancia y mantener las amplitudes de vibración dentro de los límites permisibles. Sin embargo, los resultados obtenidos en esta investigación han permitido optimizar esta relación, reduciéndola a 2.15 (CASO 1), lo que evidencia una mejora en el diseño de este tipo de cimientos sin comprometer su desempeño dinámico.

Este trabajo presenta una metodología para el análisis dinámico de fundaciones para máquinas, considerando la influencia indistinta de la amortiguación. Aunque existen limitaciones en la modelación del suelo, los resultados obtenidos ofrecen una base sólida para futuras investigaciones y aplicaciones prácticas en contextos industriales.

6.2 RECOMENDACIONES

- Para la relación de rigidez relativa $B/H=3$, se observa buena convergencia en precisión entre el MEF y los métodos analíticos MRM y MID, donde las diferencias en las amplitudes máximas no superan el 18%. Esto sugiere que las fundaciones con esta relación ofrecen un equilibrio favorable entre precisión y simplicidad, recomendándose como referencia para futuras aplicaciones prácticas.
- Para una evaluación precisa en el comportamiento de las fundaciones de máquinas, se recomienda usar el MEF para análisis detallados, considerando criterios de discretización que minimicen los costos computacionales, y los métodos analíticos en la fase de prediseño, ya que el MEF captura mejor el comportamiento dinámico

en fundaciones complejas, mientras que los métodos analíticos ofrecen una evaluación preliminar rápida.

- Se recomienda ajustar cuidadosamente los parámetros de diseño, como la geometría de la fundación, las cargas dinámicas y la caracterización del suelo, para luego controlar las diferencias en las frecuencias naturales y las amplitudes de desplazamiento, integrando los resultados del MEF con los métodos analíticos, en lo posible ajustados al problema físico, a fin de optimizar el diseño y aprovechar las ventajas de ambos enfoques.
- Se recomienda limitar la excentricidad en planta al 5% y alinear el centro de masa con el centro de rigidez de la fundación en una misma línea vertical, procurando que esta sea, en lo posible, cercana a cero. De no lograrse, el movimiento vertical se acoplará con los modos de rotación y traslación horizontal, dificultando la obtención de soluciones cerradas mediante métodos analíticos, especialmente en sistemas con múltiples grados de libertad. En tales casos, se sugiere emplear directamente el método de elementos finitos con los ajustes pertinentes. También se recomienda utilizar modelos con impedancias dinámicas para representar la IDSE con mayor precisión ante frecuencias críticas y en un amplio rango.

Los resultados actuales sugieren la necesidad de profundizar en:

- Investigar el impacto de parámetros adicionales, tanto en la fundación como en las condiciones geotécnicas del suelo (tipo de suelo, estratos diferentes y nivel freático), con el fin de mejorar la precisión de los métodos analíticos y del MEF, así como ampliar la aplicabilidad de los resultados obtenidos.
- Modelar el suelo mediante resortes y amortiguamientos no lineales, a fin de representar de forma más realista la interacción dinámica suelo-estructura y evaluar la respuesta dinámica con mayor fidelidad.
- Incorporar cargas sísmicas al análisis dinámico para evaluar la capacidad de respuesta de los métodos analíticos y del MEF bajo condiciones extremas.

BIBLIOGRAFÍA

- Abbas, A. L., Abbas, J. M., & Jawad, S. I. (2017). Analysis of gas turbine foundation under harmonic loading with and without consideration of soil—Structure interaction effect. *International Journal of Applied Engineering Research*, 12(19), 8063-8070.
- Abou Elsaoud, A. (2021). *Finite element dynamic study on large framed foundation of steam turbine generator* [Master of Science in Construction Engineering, The American University in Cairo AUC]. https://fount.aucegypt.edu/retro_etds/2455
- ACI Committee 351. (2018). *Report on Foundations for Dynamic Equipment* (ACI 351.3R). American Society of Civil Engineers.
- Ali, O. S., & Mahamid, M. (2018). Effect of soil-foundation interaction on the dynamic response of a four-cylinder compressor foundation. *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, 23(3), 05018002.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)SC.1943-5576.0000380](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000380)
- Alva Hurtado, J. (2020). *Dinámica de suelos* (1ra ed). Fondo Editorial EDUNI.
- Alzabeebee, S. (2020). Numerical analysis of the interference of two active machine foundations. *Geotechnical and Geological Engineering*, 38(5), 5043-5059.
<https://doi.org/10.1007/s10706-020-01347-w>
- American Society of Civil Engineers. (2018). *Concrete foundations for turbine generators: Analysis, design, and construction*. American Society of Civil Engineers.
- Baxter, R. L., & Bernhard, D. L. (1967). Vibration tolerances for industry. *Mechanical Engineering*, 89(7), 62.

- Bhatia, K. G. (2008a). Foundations for industrial machines and earthquake effects. *ISET Journal of Earthquake Technology, Paper*, 45(1-2), 13-29.
- Bhatia, K. G. (2008b). *Foundations for industrial machines: Handbook for practising engineers* (1st ed). CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Casanova Colon, J. (2016). *Mecánica computacional de sólidos: Prácticas sobre el método de los elementos finitos con SAP2000* (1ra ed). Universidad Politécnica de Valencia. <https://www.libelista.com/mecanica-computacional-de-solidos-practicassobre-el-metodo-de-los-elementos-finitos-con-sap2000-222418>
- Chopra, A. K. (2020). *Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering* (5th ed in SI units, global edition). Pearson.
- Chowdhury, I., & Dasgupta, S. P. (2009a). *Dynamics of structure and foundation: A unified approach. 1: Fundamentals* (1st ed). CRC Press.
- Chowdhury, I., & Dasgupta, S. P. (2009b). *Dynamics of structure and foundation: A unified approach. 2: Applications* (1st ed). CRC Press.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. (2001). *Concepts and applications of finite element analysis* (4th ed). Wiley.
- Das, B. M., & Ramana, G. V. (2011). *Principles of soil dynamics* (2nd ed). Cengage Learning.
- Das, G., & Ghosh, P. (2024). Multi-model investigation on dynamic response of machine foundations resting on geogrid reinforced foundation bed. *International Journal of Geosynthetics and Ground Engineering*, 10(4), 60. <https://doi.org/10.1007/s40891-024-00572-0>
- Dechaumphai, P., & Sucharitpwatskul, S. (2018). *Finite element analysis with ANSYS Workbench* (1st ed). Alpha Science.

- Desai, K. Y., Dhut, V. R., & Sheth, K. N. (2022). Dynamic analysis of block-type machine foundation using Barkan's model for various soil parameters. *ASPS Conference Proceedings*, 1(1), 1025-1031. <https://doi.org/10.38208/acp.v1.616>
- Dhut, V. R., Desai, K. Y., & Sheth, K. N. (2021). Parametric study of machine foundation supporting reciprocating machine using elastic half space model by FEM and classical method. *Reliability: Theory & Applications*, 60, 5-17.
- Dobry, R., & Gazetas, G. (1986). Dynamic response of arbitrarily shaped foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 112(2), 109-135. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1986\)112:2\(109\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1986)112:2(109))
- Eurocode 8. (2004). *Design of structures for earthquake resistance—Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings* (Standard EN 1998-1:2004; p. 231). CEN.
- García, G. G. (2012). *Turbinas y compresores de gas: Los motores del siglo XXI* (1ra ed). Marcombo.
- Giorgetti, S., Giorgetti, A., Tavafoghi Jahromi, R., & Arcidiacono, G. (2021). Machinery foundations dynamical analysis: A case study on reciprocating compressor foundation. *Machines*, 9(10), 228. <https://doi.org/10.3390/machines9100228>
- Gragnano, C. G., Fagnoli, V., Boldini, D., & Amorosi, A. (2014). *Comparison of structural elements response in Plaxis 3D and Sap2000*. Plaxis Bulletin. https://bentleysystems.service-now.com/community?id=kb_article&sysparm_article=KB0110078
- Grange, S., & Salciarini, D. (Eds.). (2021). *Deterministic numerical modeling of soil-structure interaction* (1st ed). ISTE Wiley.

- Hejazi, F., & Esfahani, H. M. (2021). *Solving complex problems for structures and bridges using Abaqus finite element package* (1st ed). CRC Press.
<https://doi.org/10.1201/9781003213369>
- Herrera Castiblanco, F. A. (2017). *Manual para diseño de cimentaciones para equipos vibratorios* [Tesis de Maestría, Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito]. <https://repositorio.escuelaing.edu.co/handle/001/550>
- Ioskéovich, A. V. (2022). *Введение в динамику сооружений с использованием программного комплекса SAP2000. Учебное пособие* (Spirina T. S., Ed.; 1.^a-е изд. ed.). Lan. <https://www.labirint.ru/books/641395/>
- IS 456-2000. (2021). *Bureau of indian standards* (p. 127). BIS.
- Jafarzadeh, F., & Asadinik, A. (2008). Dynamic response and impedance functions of foundation resting on sandy soil using physical model tests. *Proceedings of the 14th World Conference on Earthquake Engineering*.
https://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/14_04-01-0135.PDF
- Jafarzadeh, F., & Ghasemzade Mashhadi, H. (2009). Dynamic impedance functions of machine foundations on sandy soils by physical model tests. En M. Hamza (Ed.), *Proceedings of the 17th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering* (pp. 478-481). IOS Press. <https://doi.org/10.3233/978-1-60750-031-5-478>
- Jazar, R. N. (2022). *Advanced vibrations: Theory and application* (2nd ed). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-16356-2>
- Jia, J. (2018). *Soil dynamics and foundation modeling* (1st ed). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-40358-8>

- Khaled, M., & Gomaa, S. (2021). Effect of rigid links young's modulus on turbo generator foundation FE dynamic analysis. *International Research Journal of Innovations in Engineering and Technology*, 05(10), 40-44.
<https://doi.org/10.47001/irjiet/2021.510008>
- Lallotra, B., & Singhal, D. (2017). State of the art report—A comparative study of structural analysis and design software—STAAD Pro, SAP2000 & ETABS software. *International Journal of Engineering and Technology*, 9(2), 1030-1043. <https://doi.org/10.21817/ijet/2017/v9i2/170902211>
- Lee, H.-H. (2021). *Finite element simulations with ANSYS Workbench 2021* (1st ed). SDC Publications.
- Lysmer, J., Ostadan, F., & Chin, C. C. (2000). *A system for analysis of soil-structure interaction*. University of California, Berkeley.
- Lysmer, J., & Richart, F. E. (1966). Dynamic response of footings to vertical loading. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 92(1), 65-91.
<https://doi.org/10.1061/jsfeaq.0000846>
- Matsushita, O., Kanki, H., Keogh, P., Kobayashi, M., & Tanaka, M. (2017). *Vibrations of rotating machinery: Volume 1. Basic rotordynamics: introduction to practical vibration analysis* (1st ed). Springer Japan. <https://doi.org/10.1007/978-4-431-55456-1>
- Meirovitch, L. (1986). *Elements of vibration analysis* (2nd ed). McGraw-Hill.
- Mejía Bermejo, L. A. (2017). *Interacción dinámica suelo-estructura* [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México].
<https://repositorio.unam.mx/contenidos/215732>

- Muñoz, J. R. Z. (2013). *Diseño práctico de cimentaciones sujetas a vibración producida por maquinaria* (1ra ed). Palibrio.
- NB 1225001. (2017). *Hormigón estructural* (p. 704). IBNORCA.
- Palazzolo, A. B. (2016). *Vibration theory and applications with finite elements and active vibration control* (1st ed). Wiley.
- Petyt, M. (2010). *Introduction to finite element vibration analysis* (2nd ed). Cambridge University Press.
- Porto, T. B., Mendonca, B. Q., & Carvalho, L. S. G. (2012). Influence of soil structure interaction on the foundation of equipment subject to dynamic forces. *Mecánica Computacional, XXXI*, 2561-2573.
- Rao, S. S. (2012). *Vibraciones mecánicas* (R. Navarro Salas, Trad.; 5ta ed). Pearson Educación.
- Richart, F. E., Hall, J. R., & Woods, R. D. (1970). *Vibrations of soils and foundations* (1st ed). Prentice Hall.
- Samanta, K., & Maheshwari, P. (2024). Elasto-plastic analysis of machine foundations under harmonic and pulse loading with negative phase. *Indian Geotechnical Journal*, 54(1), 154-168. <https://doi.org/10.1007/s40098-024-00939-0>
- Saran, S. (2021). *Dynamics of soils and its engineering applications* (1st ed). CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Schneider, P. J., & Eberly, D. H. (2003). *Geometric tools for computer graphics* (1st ed). Boston : Morgan Kaufmann Publishers.
- Soares, C. (2014). *Gas turbines: A handbook of air, land and sea applications* (2nd ed). Butterworth-Heinemann.

- Suarez, L. E. (2014). *Análisis de estructuras con cargas dinámicas: Tomo I: sistemas de un grado de libertad*. CreateSpace Publishing.
- Tandon, K., Ralli, R., Manna, B., Ramana, G. V., & Datta, M. (2019). Effect of embedment on dynamic response of block foundation under coupled vibration. En D. Choudhury, K. M. El-Zahaby, & I. Idriss (Eds.), *Dynamic Soil-Structure Interaction for Sustainable Infrastructures* (pp. 1-7). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-01920-4_1
- Utami, D. P. (2022). *Design of raft foundation using Plaxis 3D V.22 Connect Edition* [Tesis de Licenciatura]. Universitas Muhammadiyah Surakarta Faculty of Engineering.
- Veletsos, A. S., & Verbič, B. (1973). Vibration of viscoelastic foundations. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2(1), 87-102.
<https://doi.org/10.1002/eqe.4290020108>
- Veletsos, A. S., & Wei, Y. T. (1971). Lateral and rocking vibration of footings. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 97(9), 1227-1248.
<https://doi.org/10.1061/jsfeaq.0001661>
- Whitman, R. V. (1972). *Analysis of soil-structure interaction: A state-of-the-art review* (p. 38). Massachusetts Institute of Technology.
- Wolf, J. P., & Song, C. (1996). *Finite-element modelling of unbounded media* (1st ed). Wiley.
- WWF Bolivia. (2020). *Situación energética de Bolivia y desafíos*. Energética.

ANEXO I

ANÁLISIS DINÁMICO DE UNA FUNDACIÓN PARA MÁQUINA POR MÉTODOS ANALÍTICOS

APLICACIÓN A UNA FUNDACIÓN TIPO BLOQUE COMBINADA PARA UNA MÁQUINA DE TURBINA A GAS

I.1 DATOS GENERALES

Aceleración de la gravedad: $g := 9.81 \frac{m}{s^2}$

I.1.1 Datos de la Máquina

El equipo dinámico rotativo, posee las siguientes características:

Frecuencia de operación normal del equipo: $\omega_1 := 2250 \text{ rpm} = 235.62 \frac{rad}{s}$

Frecuencia crítica de falla del equipo: $\omega_2 := 450 \text{ rpm} = 47.12 \frac{rad}{s}$

Frecuencia considerada para el análisis: $\omega := \omega_2 = 450 \text{ rpm}$

Tabla I.1. Cargas estáticas, dinámicas y coordenadas de los pernos de anclaje

Nro. de Perno de Anclaje	Cargas Estáticas	Cargas Dinámicas		Coordenadas de puntos de apoyo de los componentes de la máquina respecto a O	
	Carga Vertical [kN]	Carga Vertical [kN]	Carga Horizontal [kN]	x_m [m]	y_m [m]
1	311			-7.60	3.00
2	42	± 7.42	± 7.42	-7.60	0.00
3	311			-7.60	-3.00
4	517			-4.40	3.00
5	517			-4.40	-3.00
6	311			-2.00	3.00
7	50	± 6.90	± 6.90	-2.00	0.00
8	311			-2.00	-3.00
9	200			-0.80	1.50
10	200	± 52.20	± 52.20	-0.80	0.00
11	200			-0.80	-1.50
12	350			1.60	1.50
13	350	± 24.38	± 24.38	1.60	0.00
14	350			1.60	-1.50
15	185			3.20	3.00
16	185			3.20	-3.00
17	185			7.20	3.00
18	185			7.20	-3.00

Nota:

- Los pernos de anclaje de la 1 a la 14 corresponden a los componentes de la Turbina a Gas.
- Los pernos de anclaje de la 15 a la 18 pertenecen a los soportes del Generador.

I.1.2 Datos de la Fundación

La fundación de bloque combinado de base rectangular, se considera embebida en el suelo, cuyas dimensiones en planta y altura por encima del nivel de terreno natural (NTN) propuestas por el fabricante del equipo y por condiciones del proyecto son:

Largo de la fundación: $L := 16.00 \text{ m}$ Altura por encima del NTN: $H_s := 0.60 \text{ m}$

Ancho de la fundación: $B := 7.20 \text{ m}$ Embebido de pernos anclaje: $h_{ef} := 460 \text{ mm}$

El concreto estructural para el sistema de fundación, tendrá una resistencia a la compresión de:

$$f'_c := 25 \text{ MPa}$$

El peso unitario del concreto se considera igual a:

$$\gamma_c := 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

El módulo de elasticidad se determina de acuerdo a la NB 1225001, con la expresión:

$$E_c := 34 \cdot \left(\frac{\gamma_c}{\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}} \right)^{1.5} \cdot \sqrt{f'_c \cdot \text{MPa}} = 21250000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

I.1.3 Datos del Suelo

El Estudio Geotécnico indicó un suelo de apoyo de tipo cohesivo (CL) desde la profundidad de 0.6 a 8 metros sin nivel freático, cuyas características dinámicas se describen a partir de los siguientes parámetros:

Capacidad portante admisible neta: $q_{adm_neta} := 134 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

Peso unitario del suelo: $\gamma_s := 18.73 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$

Densidad del suelo: $\rho := \frac{\gamma_s}{g} = 1909.28 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Coefficiente de Poisson: $\nu := 0.40$

Velocidad de Onda de Corte: $V_s := 180 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Módulo de Corte Dinámico: $G := \rho \cdot V_s^2 = 61860.55 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

Amortiguamiento interno del material suelo (dato asumido): $D_i := 0.05$

I.2 PREDIMENSIONADO Y CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DE DISEÑO

I.2.1 Predimensionamiento de prueba del espesor de la fundación

$$H > H_{calc} \quad H_{calc} \geq \begin{bmatrix} h_{ef} + 250 \text{ mm} \\ \frac{B}{5} \\ \frac{L}{10} \\ 600 \text{ mm} + \frac{L}{30} \\ 600 \text{ mm} \end{bmatrix} \rightarrow H_{calc} = 1.60 \text{ m}$$

Se adopta una espesor en consistencia con la caracterización del suelo: $H := 2.60 \text{ m}$

Profundidad de embebido de prueba para la fundación: $H_e := H - H_s = 2.00 \text{ m}$

I.2.2 Espesor planteado y final del Análisis Dinámico de la Fundación

Luego de varias iteraciones realizadas en el análisis dinámico de la fundación y cumplidas todas verificaciones correspondientes, se obtuvieron:

Profundidad final de embebido de la fundación: $H_e := 3.00 \text{ m}$

Espesor final de la fundación de bloque combinada: $H := H_e + H_s = 3.60 \text{ m}$

I.2.3 Verificación por criterio de relación de masas

Se debe tomar en cuenta que los soportes de los equipos sujetos a vibraciones tengan una relación mínima de peso de fundación de concreto armado a peso de máquina de **2:1** para equipos centrífugos. A continuación se muestra la geometría del sistema de fundación con los puntos de carga, que conforman el peso total de la máquina:

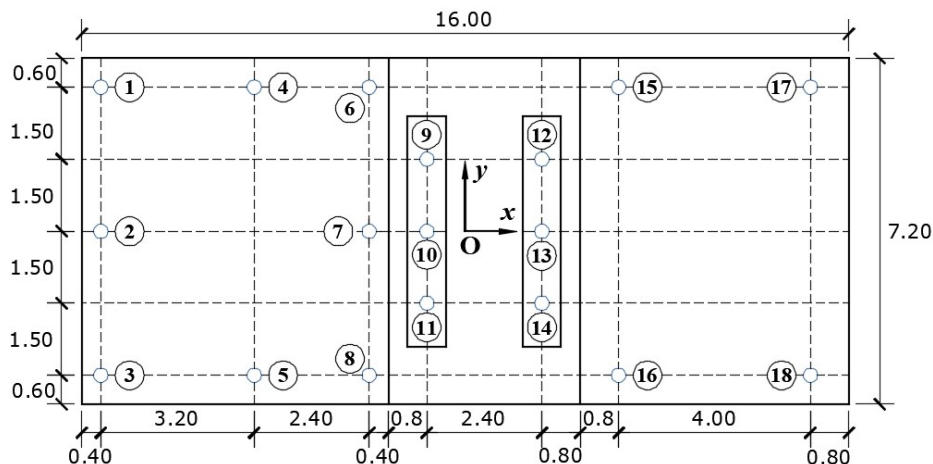


Figura I.1. Geometría en planta con los puntos de carga en el sistema de fundación

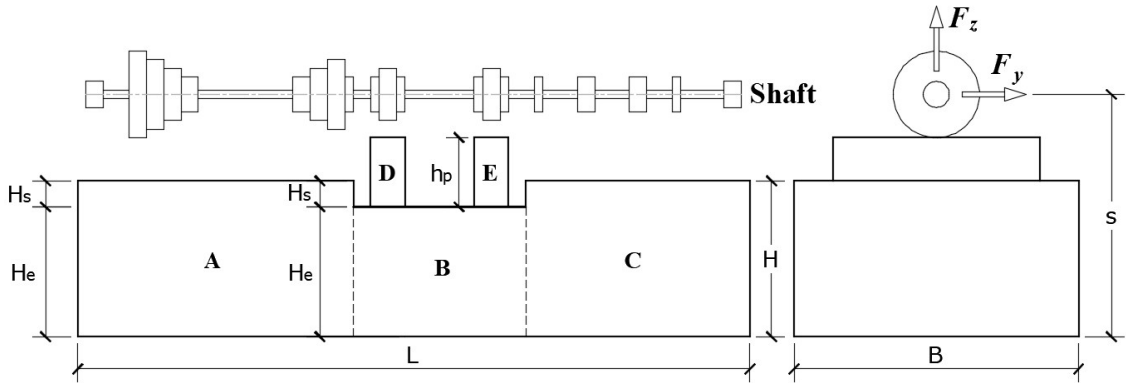


Figura I.2. Geometría en elevación y Shaft del rotor en el sistema de fundación

I.2.3.1 Determinación de peso y masa total de la Fundación

De acuerdo a los datos y condiciones técnicas del proyecto, las dimensiones, los pesos de los elementos de concreto A, B, C, D y E, que componen la fundación son:

Número de elementos componentes: $n := 5$

Altura de pedestal: $h_p := 1.60 \text{ m}$

Elemento L_x L_y L_z

Espesor de la fundación:

$$H_e + H_s = 3.60 \text{ m}$$

"A"	6.40 m	7.20 m	$H_e + H_s$	$\begin{bmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \\ W_D \\ W_E \end{bmatrix} := \gamma_c \cdot \overrightarrow{L_x \cdot L_y \cdot L_z} = \begin{bmatrix} 4147.20 \\ 2160.00 \\ 3628.80 \\ 153.60 \\ 153.60 \end{bmatrix} \text{ kN}$
"B"	4.00 m	7.20 m	H_e	
"C"	5.60 m	7.20 m	$H_e + H_s$	
"D"	0.80 m	4.80 m	h_p	
"E"	0.80 m	4.80 m	h_p	

$$W_f := \begin{bmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \\ W_D \\ W_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4147.20 \\ 2160.00 \\ 3628.80 \\ 153.60 \\ 153.60 \end{bmatrix} \text{ kN} \quad \rightarrow \quad W_{ft} := \sum_{i=1}^n W_{f_i} = 10243.20 \text{ kN}$$

Peso total de la fundación:

Con lo anterior la masa total de la fundación resulta: $m_{ft} := \frac{W_{ft}}{g} = 1044159.02 \text{ kg}$

I.2.3.2 Determinación de peso y masa total de la Máquina

Número de puntos de aplicación de los pesos que constituyen la máquina : $N := 18$

Altura de pedestales desde la base hasta la parte superior: $h_{op} := H_e + h_p = 4.60 \text{ m}$

Anexo I: Análisis dinámico de una fundación para máquina por métodos analíticos

A continuación se muestran los pesos de los componentes de la máquina y las coordenadas de los puntos de acción de las mismas, respecto al centro de rigidez en O:

<i>Puntos_de_Carga</i>	x_m (<i>m</i>)	y_m (<i>m</i>)	z_m	W_m (<i>kN</i>)
1	-7.60	3.00	$H_e + H_s$	311
2	-7.60	0.00	$H_e + H_s$	42
3	-7.60	-3.00	$H_e + H_s$	311
4	-4.40	3.00	$H_e + H_s$	517
5	-4.40	-3.00	$H_e + H_s$	517
6	-2.00	3.00	$H_e + H_s$	311
7	-2.00	0.00	$H_e + H_s$	50
8	-2.00	-3.00	$H_e + H_s$	311
9	-0.80	1.50	h_{op}	200
10	-0.80	0.00	h_{op}	200
11	-0.80	-1.50	h_{op}	200
12	1.60	1.50	h_{op}	350
13	1.60	0.00	h_{op}	350
14	1.60	-1.50	h_{op}	350
15	3.20	3.00	$H_e + H_s$	185
16	3.20	-3.00	$H_e + H_s$	185
17	7.20	3.00	$H_e + H_s$	185
18	7.20	-3.00	$H_e + H_s$	185

Espesor de la fundación:

$$H_e + H_s = 3.60 \text{ m}$$

Peso total de la máquina:

$$W_{mt} := \sum_{i=1}^N W_{m_i} = 4760.00 \text{ kN}$$

Masa total de la máquina:

$$m_{mt} := \frac{W_{mt}}{g} = 485219.16 \text{ kg}$$

I.2.3.3 Verificación de la relación de masas

Una vez determinados los pesos del sistema de fundación para la máquina se verifica lo siguiente:

$$\text{Como: } \frac{W_{ft}}{W_{mt}} = 2.15, \text{ entonces } \frac{W_f}{W_m} \geq 2 \rightarrow \text{Verificación} = \text{"Cumple"}$$

I.2.4 Verificación del margen disponible para otras cargas

El margen disponible para otras cargas no contempladas, se considera aceptable si $M_q > 30\%$, donde previamente se determina lo siguiente:

$$\text{Capacidad admisible del suelo de apoyo: } q_{adm} := q_{adm_neta} + \gamma_s \cdot H_e = 190.19 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Peso total del sistema (máquina + fundación): $W := W_{mt} + W_{ft} = 15003.20 \text{ kN}$

Presión de apoyo debido al peso total del sistema: $q := \frac{W}{B \cdot L} = 130.24 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$

Con lo anterior el margen de cargas se obtiene de: $M_q := \left(1 - \frac{q}{q_{adm}}\right) \cdot 100\%$

$$M_q = 31.52\% > 30\% \rightarrow \text{Verificación} = \text{"Cumple"}$$

I.2.5 Centroides y verificación de excentricidades

I.2.5.1 Coordenadas centroide de la máquina respecto al punto O

$$x_{mo} := \frac{\sum_{i=1}^N W_{m_i} \cdot x_{m_i}}{W_{mt}} = -1.238 \text{ m}$$

$$y_{mo} := \frac{\sum_{i=1}^N W_{m_i} \cdot y_{m_i}}{W_{mt}} = 0.000 \text{ m}$$

$$z_{mo} := \frac{\sum_{i=1}^N W_{m_i} \cdot z_{m_i}}{W_{mt}} = 3.947 \text{ m}$$

I.2.5.2 Coordenadas centroide de la fundación respecto al punto O

Coordenadas centroide de los elementos componentes A, B, C, D, E, de la fundación:

Elemento	x_f (m)	y_f (m)	z_f
"A"	-4.80	0.00	$\frac{H_e + H_s}{2}$
"B"	0.40	0.00	$\frac{H_e}{2}$
"C"	5.20	0.00	$\frac{H_e + H_s}{2}$
"D"	-0.80	0.00	$H_e + \frac{h_p}{2}$
"E"	1.60	0.00	$H_e + \frac{h_p}{2}$

$$x_f = \begin{bmatrix} -4.80 \\ 0.40 \\ 5.20 \\ -0.80 \\ 1.60 \end{bmatrix} \text{ m} \quad y_f = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} \text{ m} \quad z_f = \begin{bmatrix} 1.80 \\ 1.50 \\ 1.80 \\ 3.80 \\ 3.80 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$x_{fo} := \frac{\sum_{i=1}^n W_{f_i} \cdot x_{f_i}}{W_{ft}} = -0.005 \text{ m}$$

$$y_{fo} := \frac{\sum_{i=1}^n W_{f_i} \cdot y_{f_i}}{W_{ft}} = 0.000 \text{ m}$$

$$z_{fo} := \frac{\sum_{i=1}^n W_{f_i} \cdot z_{f_i}}{W_{ft}} = 1.797 \text{ m}$$

I.2.5.3 Coordenadas centroide del sistema (máquina + fundación) respecto a O

$$x_{co} := \frac{W_{mt} \cdot x_{mo} + W_{ft} \cdot x_{fo}}{W_{mt} + W_{ft}} = -0.396 \text{ m}$$

$$y_{co} := \frac{W_{mt} \cdot y_{mo} + W_{ft} \cdot y_{fo}}{W_{mt} + W_{ft}} = 0.000 \text{ m}$$

$$z_{co} := \frac{W_{mt} \cdot z_{mo} + W_{ft} \cdot z_{fo}}{W_{mt} + W_{ft}} = 2.479 \text{ m} \rightarrow h := z_{co} = 2.48 \text{ m}$$

I.2.5.4 Verificación de excentricidades

Excentricidad en dirección del eje x: $e_x := \left| \frac{x_{co}}{L} \right| \cdot 100\%$

$$e_x = 2.48\% < 5\% \rightarrow \text{Verificación} = \text{"Cumple"}$$

Excentricidad en dirección del eje y: $e_y := \left| \frac{y_{co}}{B} \right| \cdot 100\%$

$$e_y = 0.00\% < 5\% \rightarrow \text{Verificación} = \text{"Cumple"}$$

I.2.6 Momentos de inercia de masa

I.2.6.1 Momentos de inercia de masa de la máquina alrededor del punto O

Momento de inercia de masa de la máquina en el punto O (Eje x):

$$I_{mox_m} := \sum_{i=1}^N \frac{W_{m_i}}{g} \cdot (y_{m_i}^2 + z_{m_i}^2) = 10688746.18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Momento de inercia de masa de la máquina en el punto O (Eje y):

$$I_{moy_m} := \sum_{i=1}^N \frac{W_{m_i}}{g} \cdot (x_{m_i}^2 + z_{m_i}^2) = 16546389.40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Momento de inercia de masa de la máquina en el punto O (Eje z):

$$I_{moz_m} := \sum_{i=1}^N \frac{W_{m_i}}{g} \cdot (x_{m_i}^2 + y_{m_i}^2) = 11899845.06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

I.2.6.2 Momentos de inercia de masa de la fundación alrededor del punto O

Las masas por cada elemento componente de la fundación serán:

$$m_f := \frac{W_f}{g} = \begin{bmatrix} 422752.29 \\ 220183.49 \\ 369908.26 \\ 15657.49 \\ 15657.49 \end{bmatrix} \text{ kg}$$

Momento de inercia de masa de la fundación en el punto O (Eje x):

$$I_{mox_f} := \sum_{i=1}^n \frac{m_{f_i}}{12} \cdot (L_{y_i}^2 + L_{z_i}^2) + \sum_{i=1}^n m_{f_i} \cdot (y_{f_i}^2 + z_{f_i}^2) = 8979323.96 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Momento de inercia de masa de la fundación en el punto O (Eje y):

$$I_{moy_f} := \sum_{i=1}^n \frac{m_{f_i}}{12} \cdot (L_{x_i}^2 + L_{z_i}^2) + \sum_{i=1}^n m_{f_i} \cdot (x_{f_i}^2 + z_{f_i}^2) = 27076514.58 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Momento de inercia de masa de la fundación en el punto O (Eje z):

$$I_{moz_f} := \sum_{i=1}^n \frac{m_{f_i}}{12} \cdot (L_{x_i}^2 + L_{y_i}^2) + \sum_{i=1}^n m_{f_i} \cdot (x_{f_i}^2 + y_{f_i}^2) = 26968412.64 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

I.2.6.3 Momentos de inercia de masa del sistema alrededor del punto O

Momento de inercia de masa del sistema en el punto O (Eje x):

$$I_{mox} := I_{mox_m} + I_{mox_f} = 19668070.13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Momento de inercia de masa del sistema en el punto O (Eje y):

$$I_{moy} := I_{moy_m} + I_{moy_f} = 43622903.98 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Momento de inercia de masa del sistema en el punto O (Eje z):

$$I_{moz} := I_{moz_m} + I_{moz_f} = 38868257.70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

I.2.6.4 Momentos de inercia de masa del sistema respecto al centroide en el punto C

La masa total del sistema (máquina + fundación) resulta:

$$m := m_{mt} + m_{ft} = 1529378.19 \text{ kg}$$

Momento de inercia de masa del sistema en el punto centroide C (Eje x):

$$I_{mcx} := I_{mox} - m \cdot (y_{co}^2 + z_{co}^2) = 10270768.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Momento de inercia de masa del sistema en el punto centroide C (Eje y):

$$I_{mcy} := I_{moy} - m \cdot (x_{co}^2 + z_{co}^2) = 33985718.22 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Momento de inercia de masa del sistema en el punto centroide C (Eje z):

$$I_{mcz} := I_{moz} - m \cdot (x_{co}^2 + y_{co}^2) = 38628374.02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

I.2.7 Impedancias dinámicas (resortes y amortiguamientos)

Se determinan las Impedancias Dinámicas en los 6 GDL y en el centro de rigidez (O) del sistema, tal como se muestra en el siguiente esquema:

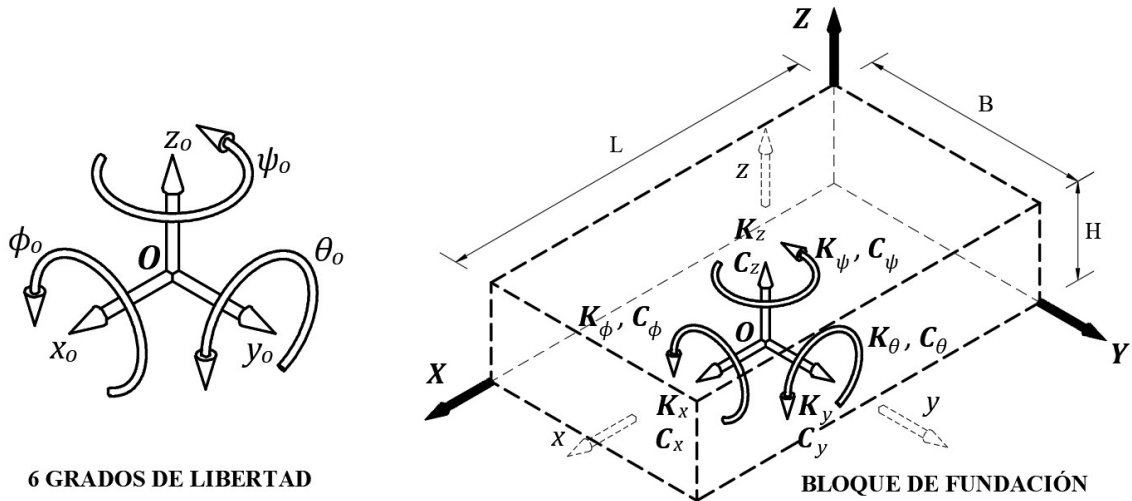


Figura I.3. Grados de libertad en el centro de rigidez del sistema de fundación

I.2.7.1 Radios equivalentes

Se propone el uso del radio equivalente, aplicando las siguientes expresiones en cada dirección de movimiento.

Radio equivalente traslacional para las direcciones horizontales x, y así como en la dirección vertical z : $r_0 := \sqrt{\frac{B \cdot L}{\pi}} = 6.06 \text{ m}$

Radio equivalente de balanceo en dirección ϕ : $r_\phi := \sqrt[4]{\frac{L \cdot B^3}{3 \cdot \pi}} = 5.02 \text{ m}$

Radio equivalente de balanceo en dirección θ : $r_\theta := \sqrt[4]{\frac{B \cdot L^3}{3 \cdot \pi}} = 7.48 \text{ m}$

Radio equivalente de torsión en dirección ψ : $r_\psi := \sqrt[4]{\frac{B \cdot L \cdot (B^2 + L^2)}{6 \cdot \pi}} = 6.59 \text{ m}$

I.2.7.2 Frecuencias adimensionales

Frecuencia adimensional en direcciones horizontales x, y así como en la dirección vertical z : $\alpha_0 := r_0 \cdot \frac{\omega}{V_s} = 1.59$

Frecuencia adimensional de balanceo en dirección ϕ : $\alpha_\phi := r_\phi \cdot \frac{\omega}{V_s} = 1.31$

Frecuencia adimensional de balanceo en dirección θ : $\alpha_\theta := r_\theta \cdot \frac{\omega}{V_s} = 1.96$

Frecuencia adimensional de torsión en dirección ψ : $\alpha_\psi := r_\psi \cdot \frac{\omega}{V_s} = 1.72$

I.2.7.3 Funciones de Impedancia Solución 1 (Sin considerar el efecto de embebido)

Para utilizar las funciones de impedancia y determinar los resortes y amortiguamientos que dependen de la frecuencia de operación de la máquina para un caso sin embebido de la fundación, se requieren estimar los siguientes factores:

Tabla I.2. Factores de impedancias en función de coeficientes de Poisson ($D_i = 0$)

Factores	$\nu=0$	$\nu=0.33$	$\nu=0.45$	$\nu=0.50$
α_1	0.775	0.650	0.600	0.600
β_1	0.525	0.500	0.450	0.400
β_2	0.800	0.800	0.800	0.800
β_3	0.000	0.000	0.023	0.027
γ_1	0.250	0.350	0.103 *	0.000
γ_2	1.000	0.800	0.235 *	0.000
γ_3	0.000	0.000	0.120 *	0.170
γ_4	0.850	0.750	0.821 *	0.850

* Valores no disponibles, los cuales fueron obtenidos por interpolación

Fuente: Modificado de Veletsos (1971)

Anexo I: Análisis dinámico de una fundación para máquina por métodos analíticos

Los factores correspondientes a $\nu=0.40$, a partir de una interpolación de la tabla son:

$$\begin{array}{llll}\alpha_1=0.621 & \beta_1=0.471 & \beta_2=0.800 & \beta_3=0.013 \\ \gamma_1=0.206 & \gamma_2=0.470 & \gamma_3=0.070 & \gamma_4=0.791\end{array}$$

• Impedancia Traslacional Vertical Z_v^1 :

Sin considerar el amortiguamiento interno del material de apoyo (Z_v^1)

$$Z_v^1 = \frac{4 \cdot G \cdot r_0}{1 - \nu} \cdot \left((1 - X_v - \gamma_3 \cdot \alpha_0^2) + i \cdot \alpha_0 \cdot (\gamma_4 + \Psi_v) \right)$$

Donde:

$$X_v := \frac{\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \alpha_0)^2}{1 + (\gamma_2 \cdot \alpha_0)^2} = 0.0736 \quad ; \quad \Psi_v := \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot (\gamma_2 \cdot \alpha_0)^2}{1 + (\gamma_2 \cdot \alpha_0)^2} = 0.0346$$

Siendo la rigidez del resorte, la parte real de la impedancia vertical (Z_v^1):

$$Z_{v_Re}^1 := \frac{4 \cdot G \cdot r_0}{1 - \nu} \cdot (1 - X_v - \gamma_3 \cdot \alpha_0^2) = 1874179.94 \frac{kN}{m}$$

El amortiguamiento se deriva por la parte imaginaria de la impedancia vertical (Z_v^1):

$$Z_{v_Im}^1 := \frac{4 \cdot G \cdot r_0}{1 - \nu} \cdot \alpha_0 \cdot (\gamma_4 + \Psi_v) = 3270340.10 \frac{kN}{m}$$

Por lo que se tiene: $C_{v_i}^1 := \frac{Z_{v_Im}^1}{\omega} = 69398.77 \frac{kN \cdot s}{m}$

Considerando el amortiguamiento interno del material de apoyo (Z_v^1)

Las rigideces para la Solución 1 del resorte y amortiguamiento ajustado, considerando el amortiguamiento interno del material de apoyo, son determinados a partir de:

$$K_v^1 := Z_{v_Re}^1 - 2 \cdot D_i \cdot C_{v_i}^1 \cdot \omega = 1547145.93 \frac{kN}{m}$$

$$C_v^1 := C_{v_i}^1 + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z_{v_Re}^1}{\omega} = 73375.91 \frac{kN \cdot s}{m}$$

• Impedancias Traslacionales Horizontales a lo largo de x e y Z_h^1 :

Sin considerar el amortiguamiento interno del material de apoyo (Z_h^1)

$$Z_h^1 = \frac{8 \cdot G \cdot r_0}{2 - \nu} \cdot (1 + i \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_1)$$

Siendo la rigidez del resorte, la parte real de la impedancia horizontal (Z^1_h):

$$Z^1_{h_{Re}} := \frac{8 \cdot G \cdot r_0}{2 - \nu} = 1872988.40 \frac{kN}{m}$$

El amortiguamiento se deriva por la parte imaginaria de la impedancia horizontal (Z^1_h):

$$Z^1_{h_{Im}} := \frac{8 \cdot G \cdot r_0}{2 - \nu} \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_1 = 1843444.40 \frac{kN}{m}$$

Por lo que se tiene: $C^1_{h_i} := \frac{Z^1_{h_{Im}}}{\omega} = 39119.11 \frac{kN \cdot s}{m}$

Considerando el amortiguamiento interno del material de apoyo (Z^1_h)

$$K^1_h := Z^1_{h_{Re}} - 2 \cdot D_i \cdot C^1_{h_i} \cdot \omega = 1688643.96 \frac{kN}{m}$$

$$C^1_h := C^1_{h_i} + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z^1_{h_{Re}}}{\omega} = 43093.71 \frac{kN \cdot s}{m}$$

• Impedancia Rotacional de Balanceo Z^1_ϕ :

Sin considerar el amortiguamiento interno del material de apoyo (Z^1_ϕ)

$$Z^1_\phi = \frac{8 \cdot G \cdot r_\phi^3}{3 \cdot (1 - \nu)} \cdot \left((1 - X_\phi - \beta_3 \cdot \alpha_\phi^2) + i \cdot \alpha_\phi \cdot \Psi_\phi \right)$$

Donde:

$$X_\phi := \frac{\beta_1 \cdot (\beta_2 \cdot \alpha_\phi)^2}{1 + (\beta_2 \cdot \alpha_\phi)^2} = 0.2471 \quad ; \quad \Psi_\phi := \frac{\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\beta_2 \cdot \alpha_\phi)^2}{1 + (\beta_2 \cdot \alpha_\phi)^2} = 0.1977$$

Siendo la rigidez del resorte, la parte real de la impedancia rotacional (Z^1_ϕ):

$$Z^1_{\phi_{Re}} := \frac{8 \cdot G \cdot r_\phi^3}{3 \cdot (1 - \nu)} \cdot (1 - X_\phi - \beta_3 \cdot \alpha_\phi^2) = 25340077.41 \frac{kN \cdot m}{m}$$

El amortiguamiento se deriva por la parte imaginaria de la impedancia rotacional (Z^1_ϕ):

$$Z^1_{\phi_{Im}} := \frac{8 \cdot G \cdot r_\phi^3}{3 \cdot (1 - \nu)} \cdot \alpha_\phi \cdot \Psi_\phi = 9014894.71 \frac{kN \cdot m}{m}$$

Por lo que se tiene: $C^1_{\phi_i} := \frac{Z^1_{\phi_{Im}}}{\omega} = 191302.01 \frac{kN \cdot m \cdot s}{m}$

Considerando el amortiguamiento interno del material de apoyo (Z^1_ϕ)

$$K^1_\phi := Z^1_{\phi_Re} - 2 \cdot D_i \cdot C^1_{\phi_i} \cdot \omega = 24438587.94 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$C^1_\phi := C^1_{\phi_i} + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z^1_{\phi_Re}}{\omega} = 245075.32 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

• Impedancia Rotacional de Balanceo Z^1_θ :

Sin considerar el amortiguamiento interno del material de apoyo (Z^1_θ)

$$Z^1_\theta = \frac{8 \cdot G \cdot r_\theta^3}{3 \cdot (1 - \nu)} \cdot \left((1 - X_\theta - \beta_3 \cdot \alpha_\theta^2) + i \cdot \alpha_\theta \cdot \Psi_\theta \right)$$

Donde:

$$X_\theta := \frac{\beta_1 \cdot (\beta_2 \cdot \alpha_\theta)^2}{1 + (\beta_2 \cdot \alpha_\theta)^2} = 0.3345 \quad ; \quad \Psi_\theta := \frac{\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\beta_2 \cdot \alpha_\theta)^2}{1 + (\beta_2 \cdot \alpha_\theta)^2} = 0.2676$$

Siendo la rigidez del resorte, la parte real de la impedancia rotacional (Z^1_θ):

$$Z^1_{\theta_Re} := \frac{8 \cdot G \cdot r_\theta^3}{3 \cdot (1 - \nu)} \cdot (1 - X_\theta - \beta_3 \cdot \alpha_\theta^2) = 70632313.16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El amortiguamiento se deriva por la parte imaginaria de la impedancia rotacional (Z^1_θ):

$$Z^1_{\theta_Im} := \frac{8 \cdot G \cdot r_\theta^3}{3 \cdot (1 - \nu)} \cdot \alpha_\theta \cdot \Psi_\theta = 60272208.68 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Por lo que se tiene: $C^1_{\theta_i} := \frac{Z^1_{\theta_Im}}{\omega} = 1279015.99 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$

Considerando el amortiguamiento interno del material de apoyo (Z^1_θ)

$$K^1_\theta := Z^1_{\theta_Re} - 2 \cdot D_i \cdot C^1_{\theta_i} \cdot \omega = 64605092.29 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$C^1_\theta := C^1_{\theta_i} + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z^1_{\theta_Re}}{\omega} = 1428902.42 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

• Impedancia Rotacional de Torsión Z^1_ψ :

Sin considerar el amortiguamiento interno del material de apoyo (Z^1_ψ)

$$Z^1_\psi = \frac{16 \cdot G \cdot r_\psi^3}{3} \cdot (A' + i \cdot \alpha_\psi \cdot B')$$

Donde:

$$b_1 := 0.425 \quad ; \quad b_2 := 0.687$$

$$A' := 1 - \frac{b_1 \cdot (b_2 \cdot \alpha_\psi)^2}{1 + (b_2 \cdot \alpha_\psi)^2} = 0.7519 \quad ; \quad B' := \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot (b_2 \cdot \alpha_\psi)^2}{1 + (b_2 \cdot \alpha_\psi)^2} = 0.1705$$

Siendo la rigidez del resorte, la parte real de la impedancia torsional $\langle Z_\psi^1 \rangle$:

$$Z_{\psi Re}^1 := \frac{16 \cdot G \cdot r_\psi^3}{3} \cdot A' = 70860433.18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El amortiguamiento se deriva por la parte imaginaria de la impedancia torsional $\langle Z_\psi^1 \rangle$:

$$Z_{\psi Im}^1 := \frac{16 \cdot G \cdot r_\psi^3}{3} \cdot \alpha_\psi \cdot B' = 27702573.56 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Por lo que se tiene: $C_{\psi i}^1 := \frac{Z_{\psi Im}^1}{\omega} = 587866.87 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$

Considerando el amortiguamiento interno del material de apoyo $\langle Z_\psi^1 \rangle$:

$$K_\psi^1 := Z_{\psi Re}^1 - 2 \cdot D_i \cdot C_{\psi i}^1 \cdot \omega = 68090175.82 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$C_\psi^1 := C_{\psi i}^1 + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z_{\psi Re}^1}{\omega} = 738237.38 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

I.2.7.4 Funciones de Impedancia Solución 2 (Considerando el efecto de embebido)

Se aplican las funciones de impedancia planteadas por **Veletsos y Verbič (1973)**, las que toman en cuenta la parte de la fundación embebida, empleando los siguientes factores:

Tabla I.3. Factores de impedancias en función del tipo de suelo ($D_i = 0$)

Movimiento	Suelo lateral	Factores de rigidez	
Vertical	Tipo	S_{v1}	S_{v2}
	Cohesivo	2.70	6.70
	Granular	2.70	6.70
Horizontal	Tipo	S_{h1}	S_{h2}
	Cohesivo	4.10	10.60
	Granular	4.00	9.10
Balanceo	Tipo	$S_{\phi 1}$	$S_{\phi 2}$
	Cohesivo	2.50	1.80
	Granular	2.50	1.80
Torsión	Tipo	$S_{\eta 1}$	$S_{\eta 2}$
	Cohesivo	10.20	5.40
	Granular	10.20	5.40

Fuente: Modificado de Veletsos y Verbič (1973)

Anexo I: Análisis dinámico de una fundación para máquina por métodos analíticos

Los factores correspondientes para un tipo de **suelo cohesivo** obtenidos de la tabla anterior son:

$$\begin{array}{llll} S_{v1} = 2.70 & S_{h1} = 4.10 & S_{\phi1} = 2.50 & S_{\eta1} = 10.20 \\ S_{v2} = 6.70 & S_{h2} = 10.60 & S_{\phi2} = 1.80 & S_{\eta2} = 5.40 \end{array}$$

• Impedancia Traslacional Vertical Z_v^2 :

Sin considerar el amortiguamiento interno del material de embebido (Z_v^2):

$$Z_v^2 = G \cdot H_e \cdot (S_{v1} + i \cdot \alpha_0 \cdot S_{v2})$$

Donde: $S_{v1} = 2.70$; $S_{v2} = 6.70$

Siendo la rigidez del resorte, la parte real de la impedancia vertical (Z_v^2):

$$Z_{v_Re}^2 := G \cdot H_e \cdot S_{v1} = 501070.46 \frac{kN}{m}$$

El amortiguamiento se deriva por la parte imaginaria de la impedancia vertical (Z_v^2):

$$Z_{v_Im}^2 := G \cdot H_e \cdot \alpha_0 \cdot S_{v2} = 1971195.81 \frac{kN}{m}$$

Por lo que se tiene: $C_{v_i}^2 := \frac{Z_{v_Im}^2}{\omega} = 41830.07 \frac{kN \cdot s}{m}$

Considerando el amortiguamiento interno del material de embebido (Z_v^2):

Las rigideces para la Solución 2 del resorte y amortiguamiento ajustado, considerando el amortiguamiento interno del material de embebido, son las que se muestran a continuación:

$$K_v^2 := Z_{v_Re}^2 - 2 \cdot D_i \cdot C_{v_i}^2 \cdot \omega = 303950.88 \frac{kN}{m}$$

$$C_v^2 := C_{v_i}^2 + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z_{v_Re}^2}{\omega} = 42893.38 \frac{kN \cdot s}{m}$$

• Impedancias Traslacionales Horizontales a lo largo de x e y Z_h^2 :

Sin considerar el amortiguamiento interno del material de embebido (Z_h^2):

$$Z_h^2 = G \cdot H_e \cdot (S_{h1} + i \cdot \alpha_0 \cdot S_{h2})$$

Siendo la rigidez del resorte, la parte real de la impedancia horizontal (Z_h^2):

$$Z_{h_Re}^2 := G \cdot H_e \cdot S_{h1} = 760884.77 \frac{kN}{m}$$

El amortiguamiento se deriva por la parte imaginaria de la impedancia horizontal (Z_h^2):

$$Z_{h_Im}^2 := G \cdot H_e \cdot \alpha_0 \cdot S_{h2} = 3118608.30 \frac{kN}{m}$$

Por lo que se tiene: $C_{h_i}^2 := \frac{Z_{h_Im}^2}{\omega} = 66178.92 \frac{kN \cdot s}{m}$

Considerando el amortiguamiento interno del material de embebido (Z_h^2)

$$K_h^2 := Z_{h_Re}^2 - 2 \cdot D_i \cdot C_{h_i}^2 \cdot \omega = 449023.94 \frac{kN}{m}$$

$$C_h^2 := C_{h_i}^2 + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z_{h_Re}^2}{\omega} = 67793.57 \frac{kN \cdot s}{m}$$

• Impedancia Rotacional de Balanceo Z_ϕ^2 :

Sin considerar el amortiguamiento interno del material de embebido (Z_ϕ^2)

$$Z_\phi^2 = G \cdot r_\phi^2 \cdot H_e \cdot (S_{\phi1} + i \cdot \alpha_\phi \cdot S_{\phi2})$$

Donde: $S_{\phi1} = 2.50$; $S_{\phi2} = 1.80$

Siendo la rigidez del resorte, la parte real de la impedancia rotacional (Z_ϕ^2):

$$Z_{\phi_Re}^2 := G \cdot r_\phi^2 \cdot H_e \cdot S_{\phi1} = 11678799.86 \text{ kN} \cdot m$$

El amortiguamiento se deriva por la parte imaginaria de la impedancia rotacional (Z_ϕ^2):

$$Z_{\phi_Im}^2 := G \cdot r_\phi^2 \cdot H_e \cdot \alpha_\phi \cdot S_{\phi2} = 11044878.05 \text{ kN} \cdot m$$

Por lo que se tiene: $C_{\phi_i}^2 := \frac{Z_{\phi_Im}^2}{\omega} = 234379.59 \text{ kN} \cdot m \cdot s$

Considerando el amortiguamiento interno del material de embebido (Z_ϕ^2)

$$K_\phi^2 := Z_{\phi_Re}^2 - 2 \cdot D_i \cdot C_{\phi_i}^2 \cdot \omega = 10574312.05 \text{ kN} \cdot m$$

$$C_\phi^2 := C_{\phi_i}^2 + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z_{\phi_Re}^2}{\omega} = 259162.77 \text{ kN} \cdot m \cdot s$$

• Impedancia Rotacional de Balanceo Z_θ^2 :

Sin considerar el amortiguamiento interno del material de embebido (Z_θ^2)

$$Z_\theta^2 = G \cdot r_\theta^2 \cdot H_e \cdot (S_{\phi1} + i \cdot \alpha_\theta \cdot S_{\phi2})$$

Donde: $S_{\phi1} = 2.50$; $S_{\phi2} = 1.80$

Siendo la rigidez del resorte, la parte real de la impedancia rotacional $\langle Z_{\theta}^2 \rangle$:

$$Z_{\theta_Re}^2 := G \cdot r_{\theta}^2 \cdot H_e \cdot S_{\phi 1} = 25952888.57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El amortiguamiento se deriva por la parte imaginaria de la impedancia rotacional $\langle Z_{\theta}^2 \rangle$:

$$Z_{\theta_Im}^2 := G \cdot r_{\theta}^2 \cdot H_e \cdot \alpha_{\theta} \cdot S_{\phi 2} = 36588293.52 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Por lo que se tiene: $C_{\theta_i}^2 := \frac{Z_{\theta_Im}^2}{\omega} = 776427.70 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$

Considerando el amortiguamiento interno del material de embebido $\langle Z_{\theta}^2 \rangle$

$$K_{\theta}^2 := Z_{\theta_Re}^2 - 2 \cdot D_i \cdot C_{\theta_i}^2 \cdot \omega = 22294059.22 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$C_{\theta}^2 := C_{\theta_i}^2 + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z_{\theta_Re}^2}{\omega} = 831501.44 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

• **Impedancia Rotacional de Torsión Z_{ψ}^2 :**

Sin considerar el amortiguamiento interno del material de embebido $\langle Z_{\psi}^2 \rangle$

$$Z_{\psi}^2 = G \cdot r_{\psi}^2 \cdot H_e \cdot (S_{\eta 1} + i \cdot \alpha_{\psi} \cdot S_{\eta 2})$$

Donde: $S_{\eta 1} = 10.20$; $S_{\eta 2} = 5.40$

Siendo la rigidez del resorte, la parte real de la impedancia torsional $\langle Z_{\psi}^2 \rangle$:

$$Z_{\psi_Re}^2 := G \cdot r_{\psi}^2 \cdot H_e \cdot S_{\eta 1} = 82105719.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El amortiguamiento se deriva por la parte imaginaria de la impedancia torsional $\langle Z_{\psi}^2 \rangle$:

$$Z_{\psi_Im}^2 := G \cdot r_{\psi}^2 \cdot H_e \cdot \alpha_{\psi} \cdot S_{\eta 2} = 74947081.57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Por lo que se tiene: $C_{\psi_i}^2 := \frac{Z_{\psi_Im}^2}{\omega} = 1590426.47 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$

Considerando el amortiguamiento interno del material de embebido $\langle Z_{\psi}^2 \rangle$

$$K_{\psi}^2 := Z_{\psi_Re}^2 - 2 \cdot D_i \cdot C_{\psi_i}^2 \cdot \omega = 74611011.09 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$C_{\psi}^2 := C_{\psi_i}^2 + 2 \cdot D_i \cdot \frac{Z_{\psi_Re}^2}{\omega} = 1764660.21 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

1.2.7.5 Resortes y amortiguamientos totales del sistema de fundación

La sumatoria de resortes y amortiguamientos encontrados en las Soluciones 1 y 2, por el método de la impedancia dinámica establecida por **Veletsos y Verbič**, da como resultado los resortes y amortiguamientos totales finales en cada dirección de movimiento del sistema de fundación.

Los valores finales correspondientes al amortiguamiento, son reducidas a un 50% por recomendaciones de los mismos autores, debido a la no consideración estratigráfica, anisotrópica y otras incertidumbres asociadas al suelo.

- **Resortes y amortiguamientos traslacionales verticales en dirección z :**

$$K_z := K_v^1 + K_v^2 = 1851096.81 \frac{kN}{m}$$

$$C_z := 0.50 (C_v^1 + C_v^2) = 58134.64 \frac{kN \cdot s}{m}$$

- **Resortes y amortiguamientos traslacionales horizontales en direcciones x e y :**

$$K_x := K_h^1 + K_h^2 = 2137667.90 \frac{kN}{m} \quad \rightarrow \quad K_y := K_x = 2137667.90 \frac{kN}{m}$$

$$C_x := 0.50 (C_h^1 + C_h^2) = 55443.64 \frac{kN \cdot s}{m} \quad \rightarrow \quad C_y := C_x = 55443.64 \frac{kN \cdot s}{m}$$

- **Resortes y amortiguamientos rotacionales de balanceo en dirección ϕ :**

$$K_\phi := K_\phi^1 + K_\phi^2 = 35012899.99 \text{ } kN \cdot m$$

$$C_\phi := 0.50 (C_\phi^1 + C_\phi^2) = 252119.05 \text{ } kN \cdot m \cdot s$$

- **Resortes y amortiguamientos rotacionales de balanceo en dirección θ :**

$$K_\theta := K_\theta^1 + K_\theta^2 = 86899151.51 \text{ } kN \cdot m$$

$$C_\theta := 0.50 (C_\theta^1 + C_\theta^2) = 1130201.93 \text{ } kN \cdot m \cdot s$$

- **Resortes y amortiguamientos rotacionales de torsión en dirección ψ :**

$$K_\psi := K_\psi^1 + K_\psi^2 = 142701186.91 \text{ } kN \cdot m$$

$$C_\psi := 0.50 (C_\psi^1 + C_\psi^2) = 1251448.80 \text{ } kN \cdot m \cdot s$$

1.2.8 Fuerzas dinámicas ejercidas por la máquina

Las fuerzas dinámicas desbalanceadas proporcionadas por el fabricante del equipo, deben ser transferidas al centro de rigidez en O.

Estas fuerzas dinámicas actúan en el Shaft (CL del Rotor) del equipo, las cuales son:

$$F_{v2} = 7.42 \text{ } kN$$

$$F_{h2} = 7.42 \text{ } kN$$

$$F_{v7} = 6.90 \text{ } kN$$

$$F_{h7} = 6.90 \text{ } kN$$

$$F_{v10} = 52.20 \text{ } kN$$

$$F_{h10} = 52.20 \text{ } kN$$

$$F_{v13} = 24.38 \text{ } kN$$

$$F_{h13} = 24.38 \text{ } kN$$

- **Fuerza dinámica vertical (movimiento vertical a lo largo de la dirección z)**

$$F_z = F_{oz} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$F_{oz} := F_{v2} + F_{v7} + F_{v10} + F_{v13} = 90.90 \text{ kN}$$

- **Momento dinámico de torsión (movimiento alrededor del eje z, dirección ψ)**

$$M_\psi = M_{o\psi} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$M_{o\psi} := F_{h2} \cdot x_{m_2} + F_{h7} \cdot x_{m_7} + F_{h10} \cdot x_{m_{10}} + F_{h13} \cdot x_{m_{13}} = -72.94 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- **Fuerzas y momentos dinámicos en el plano y-z (movimiento en direcciones y , ϕ)**

$$F_y = F_{oy} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$F_{oy} := F_{h2} + F_{h7} + F_{h10} + F_{h13} = 90.90 \text{ kN}$$

La altura de ubicación del Shaft por encima de la parte superior de la fundación es:

$$h_{CL} := 2.00 \text{ m}$$

Siendo el brazo de palanca para el momento alrededor al eje x, que pasa por O:

$$s := H + h_{CL} = 5.60 \text{ m}$$

Con lo anterior el momento dinámico alrededor al eje x, que pasa por O, resulta:

$$M_\phi = M_{o\phi} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$M_{o\phi} := -F_{oy} \cdot s = -509.04 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- **Fuerzas y momentos dinámicos en el plano x-z (movimiento en direcciones x , θ)**

$$F_x = F_{ox} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$F_{ox} := 0.00 \text{ kN}$$

Donde el momento dinámico alrededor al eje y, que pasa por O, resulta:

$$M_\theta = M_{o\theta} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$M_{o\theta} := -F_{v2} \cdot x_{m_2} - F_{v7} \cdot x_{m_7} - F_{v10} \cdot x_{m_{10}} - F_{v13} \cdot x_{m_{13}} = 72.94 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

I.3 ANÁLISIS DINÁMICO CLÁSICO Y CON FORMULACIÓN DE LAGRANGE

I.3.1 Cálculo y verificación de frecuencias en zonas de resonancia

Para determinar si las frecuencias naturales en los modos de vibración correspondientes, se encuentran o no en zonas de resonancia, se halla el margen de frecuencias de la velocidad de operación de la máquina con respecto a las 6 frecuencias naturales del sistema, debiendo estar este margen de frecuencias (M_i) distanciadas del $\pm 20\%$, es decir, si el $M_i > 20\%$, las frecuencias naturales del sistema estarán fuera de la zona de resonancia.

$$M_i = \left| 1 - \frac{f_i}{f} \right| \cdot 100\%$$

Donde:

M_i : margen de frecuencias en el modo respectivo de vibración i

f : frecuencia de operación de la máquina

f_i : frecuencia del sistema en el modo respectivo de vibración i

• Frecuencias angulares límite en los modos respectivos

$$\begin{aligned} \omega_{nx} &:= \sqrt{\frac{K_x}{m}} = 37.39 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & \omega_{ny} &:= \sqrt{\frac{K_y}{m}} = 37.39 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & \omega_{nz} &:= \sqrt{\frac{K_z}{m}} = 34.79 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \omega_{n\phi} &:= \sqrt{\frac{K_\phi}{I_{mox}}} = 42.19 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & \omega_{n\theta} &:= \sqrt{\frac{K_\theta}{I_{moy}}} = 44.63 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & \omega_{n\psi} &:= \sqrt{\frac{K_\psi}{I_{moz}}} = 60.59 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

• Frecuencias naturales en los modos desacoplados (Modos z , ψ)

$$\begin{aligned} \omega_z &:= \omega_{nz} = 34.79 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_z := \omega_z \cdot \frac{\text{rev}}{2 \cdot \pi \cdot \text{rad}} = 5.54 \text{ Hz} \\ \omega_\psi &:= \omega_{n\psi} = 60.59 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_\psi := \omega_\psi \cdot \frac{\text{rev}}{2 \cdot \pi \cdot \text{rad}} = 9.64 \text{ Hz} \end{aligned}$$

• Frecuencias naturales de los modos acoplados en el plano y-z (Modos y , ϕ)

$$\begin{aligned} \gamma_x &:= \frac{I_{mcx}}{I_{mox}} = 0.52 & \omega_{ny}^2 &= 1397.74 \frac{1}{\text{s}^2} & \omega_{n\phi}^2 &= 1780.19 \frac{1}{\text{s}^2} \\ \omega_{n1} &:= \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \gamma_x} \cdot (\omega_{ny}^2 + \omega_{n\phi}^2) - \frac{1}{2 \cdot \gamma_x} \cdot \sqrt{(\omega_{ny}^2 + \omega_{n\phi}^2)^2 - 4 \cdot \gamma_x \cdot \omega_{ny}^2 \cdot \omega_{n\phi}^2}} = 30.38 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \omega_{n2} &:= \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \gamma_x} \cdot (\omega_{ny}^2 + \omega_{n\phi}^2) + \frac{1}{2 \cdot \gamma_x} \cdot \sqrt{(\omega_{ny}^2 + \omega_{n\phi}^2)^2 - 4 \cdot \gamma_x \cdot \omega_{ny}^2 \cdot \omega_{n\phi}^2}} = 71.85 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

$$\omega_y = 30.38 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_y := \omega_y \cdot \frac{\text{rev}}{2 \cdot \pi \cdot \text{rad}} = 4.84 \text{ Hz}$$

$$\omega_\phi = 71.85 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_\phi := \omega_\phi \cdot \frac{\text{rev}}{2 \cdot \pi \cdot \text{rad}} = 11.44 \text{ Hz}$$

• Frecuencias naturales de los modos acoplados en el plano x-z (Modos x , θ)

$$\gamma_y := \frac{I_{mcy}}{I_{moy}} = 0.78 \quad \omega_{nx}^2 = 1397.74 \frac{1}{\text{s}^2} \quad \omega_{n\theta}^2 = 1992.05 \frac{1}{\text{s}^2}$$

$$\omega_{n1} := \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \gamma_y} \cdot (\omega_{nx}^2 + \omega_{n\theta}^2) - \frac{1}{2 \cdot \gamma_y} \cdot \sqrt{(\omega_{nx}^2 + \omega_{n\theta}^2)^2 - 4 \cdot \gamma_y \cdot \omega_{nx}^2 \cdot \omega_{n\theta}^2}} = 33.15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_{n2} := \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \gamma_y} \cdot (\omega_{nx}^2 + \omega_{n\theta}^2) + \frac{1}{2 \cdot \gamma_y} \cdot \sqrt{(\omega_{nx}^2 + \omega_{n\theta}^2)^2 - 4 \cdot \gamma_y \cdot \omega_{nx}^2 \cdot \omega_{n\theta}^2}} = 57.03 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_x = 33.15 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_x := \omega_x \cdot \frac{\text{rev}}{2 \cdot \pi \cdot \text{rad}} = 5.28 \text{ Hz}$$

$$\omega_\theta = 57.03 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_\theta := \omega_\theta \cdot \frac{\text{rev}}{2 \cdot \pi \cdot \text{rad}} = 9.08 \text{ Hz}$$

• Verificación del riesgo de resonancia en los modos desacoplados y acoplados

$$M_z := \left| 1 - \frac{f_z}{f} \right| \cdot 100\% = 26.17\%$$

Como el margen de frecuencia es: $M_z > 20\% \rightarrow \text{Resonancia}_z = \text{"No Existe"}$

$$M_\psi := \left| 1 - \frac{f_\psi}{f} \right| \cdot 100\% = 28.58\%$$

Como el margen de frecuencia es: $M_\psi > 20\% \rightarrow \text{Resonancia}_\psi = \text{"No Existe"}$

$$M_y := \left| 1 - \frac{f_y}{f} \right| \cdot 100\% = 35.53\%$$

Como el margen de frecuencia es: $M_y > 20\% \rightarrow \text{Resonancia}_y = \text{"No Existe"}$

$$M_\phi := \left| 1 - \frac{f_\phi}{f} \right| \cdot 100\% = 52.47\%$$

Como el margen de frecuencia es: $M_\phi > 20\% \rightarrow \text{Resonancia}_\phi = \text{"No Existe"}$

$$M_x := \left| 1 - \frac{f_x}{f} \right| \cdot 100\% = 29.65\%$$

Como el margen de frecuencia es: $M_x > 20\% \rightarrow \text{Resonancia}_x = \text{"No Existe"}$

$$M_\theta := \left| 1 - \frac{f_\theta}{f} \right| \cdot 100\% = 21.01\%$$

Como el margen de frecuencia es: $M_\theta > 20\% \rightarrow \text{Resonancia}_\theta = \text{"No Existe"}$

I.3.2 Amplitudes del sistema en el centro de rigidez O

I.3.2.1 Deflexiones estáticas, relaciones de frecuencia y amortiguamiento

Considerando a la unidad de micrómetros como micrones se tendrá: $\mu s := 10^{-6} \text{ m}$

Considerando a la unidad de micro radianes tenemos: $\mu rs := 10^{-6} \text{ rad}$

• Deflexiones estáticas, relaciones de frecuencia y amortiguamiento (Modos z , ψ)

$$\begin{aligned} \delta_z &:= \frac{F_{oz}}{K_z} = 49.11 \mu s & \beta_z &:= \frac{\omega}{\omega_z} = 1.35 & \zeta_z &:= \frac{C_z}{2 \cdot \sqrt{K_z \cdot m}} = 0.55 \\ \delta_\psi &:= \frac{M_{o\psi}}{K_\psi} = -0.51 \mu rs & \beta_\psi &:= \frac{\omega}{\omega_\psi} = 0.78 & \zeta_\psi &:= \frac{C_\psi}{2 \cdot \sqrt{K_\psi \cdot I_{moz}}} = 0.27 \end{aligned}$$

• Deflexiones estáticas, relaciones de frecuencia y amortiguamiento (Modos y , ϕ)

$$\begin{aligned} \delta_y &:= \frac{F_{oy}}{K_y} = 42.52 \mu s & \beta_{ny} &:= \frac{\omega}{\omega_{ny}} = 1.26 & \zeta_y &:= \frac{C_y}{2 \cdot \sqrt{K_y \cdot m}} = 0.48 \\ \delta_\phi &:= \frac{M_{o\phi}}{K_\phi} = -14.54 \mu rs & \beta_{n\phi} &:= \frac{\omega}{\omega_{n\phi}} = 1.12 & \zeta_\phi &:= \frac{C_\phi}{2 \cdot \sqrt{K_\phi \cdot I_{mox}}} = 0.15 \\ & & \beta_y &:= \frac{\omega}{\omega_y} = 1.55 & \beta_\phi &:= \frac{\omega}{\omega_\phi} = 0.66 \end{aligned}$$

• Deflexiones estáticas, relaciones de frecuencia y amortiguamiento (Modos x , θ)

$$\begin{aligned} \delta_x &:= \frac{F_{ox}}{K_x} = 0.00 \mu s & \beta_{nx} &:= \frac{\omega}{\omega_{nx}} = 1.26 & \zeta_x &:= \frac{C_x}{2 \cdot \sqrt{K_x \cdot m}} = 0.48 \\ \delta_\theta &:= \frac{M_{o\theta}}{K_\theta} = 0.84 \mu rs & \beta_{n\theta} &:= \frac{\omega}{\omega_{n\theta}} = 1.06 & \zeta_\theta &:= \frac{C_\theta}{2 \cdot \sqrt{K_\theta \cdot I_{moy}}} = 0.29 \\ & & \beta_x &:= \frac{\omega}{\omega_x} = 1.42 & \beta_\theta &:= \frac{\omega}{\omega_\theta} = 0.83 \end{aligned}$$

I.3.2.2 Amplitudes de vibración en el centro de rigidez O

- Amplitud de vibración (movimiento vertical a lo largo del eje z) $z_o = 58.83 \mu s$
- Amplitud de vibración (movimiento alrededor del eje z) $\psi_o = -1.29 \mu rs$
- Amplitudes de vibración en el plano y-z (movimiento en direcciones y , ϕ)
 $y_o = -58.33 \mu s$; $\phi_o = 2.08 \mu rs$
- Amplitudes de vibración en el plano x-z (movimiento en direcciones x , θ)
 $x_o = -10.21 \mu s$; $\theta_o = 1.53 \mu rs$

I.3.3 Máximas amplitudes de vibración en la parte superior de la fundación

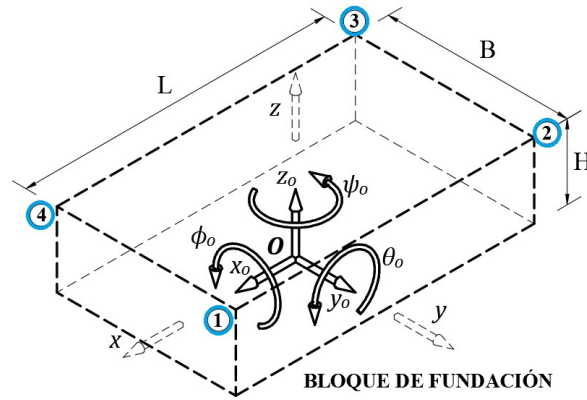


Figura I.4. Puntos de referencia en los bordes superiores del sistema de fundación

Los vectores Punto de los bordes superiores de la fundación respecto al centro de rigidez O son:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.5 L \\ 0.5 \cdot B \\ H \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m} = \begin{bmatrix} 8.00 \\ 3.60 \\ 3.60 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -0.5 L \\ 0.5 \cdot B \\ H \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m} = \begin{bmatrix} -8.00 \\ 3.60 \\ 3.60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -0.5 L \\ -0.5 \cdot B \\ H \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m} = \begin{bmatrix} -8.00 \\ -3.60 \\ 3.60 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.5 L \\ -0.5 \cdot B \\ H \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m} = \begin{bmatrix} 8.00 \\ -3.60 \\ 3.60 \end{bmatrix}$$

Aplicando las expresiones matriciales de traslación y rotación a los vectores puntos se tiene:

$$P'_i = R_z(\psi_o) \cdot R_y(\theta_o) \cdot R_x(\phi_o) \cdot T(x_o, y_o, z_o) \cdot P_i \quad (I)$$

Donde la matriz de traslación general de cada punto vendrá dada por la siguiente expresión matricial:

$$T(x_o, y_o, z_o) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_o \cdot m^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & y_o \cdot m^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & z_o \cdot m^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (II)$$

Por otro parte las matrices de rotación respecto al centro de rotación alrededor de los ejes x, y, z, son representadas por las siguientes expresiones matriciales:

$$R_x(\phi_o) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_o) & -\sin(\phi_o) & 0 \\ 0 & \sin(\phi_o) & \cos(\phi_o) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III)$$

$$R_y(\theta_o) := \begin{bmatrix} \cos(\theta_o) & 0 & \sin(\theta_o) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_o) & 0 & \cos(\theta_o) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (IV)$$

$$R_z(\psi_o) := \begin{bmatrix} \cos(\psi_o) & -\sin(\psi_o) & 0 & 0 \\ \sin(\psi_o) & \cos(\psi_o) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (V)$$

La expresión que se muestra a continuación, es la matriz extendida con los vectores de puntos correspondientes a los bordes superiores de la fundación:

$$P_i := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.00 & -8.00 & -8.00 & 8.00 \\ 3.60 & 3.60 & -3.60 & -3.60 \\ 3.60 & 3.60 & 3.60 & 3.60 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix} \quad (VI)$$

Reemplazando las expresiones matriciales (II) a la (VI) en la ecuación matricial (I), obtenemos la nueva ubicación de los puntos referidos a los bordes superiores de la fundación:

$$P'_i := R_z(\psi_o) \cdot R_y(\theta_o) \cdot R_x(\phi_o) \cdot T(x_o, y_o, z_o) \cdot P_i \cdot m = \begin{bmatrix} 8.00 & -8.00 & -8.00 & 8.00 \\ 3.60 & 3.60 & -3.60 & -3.60 \\ 3.60 & 3.60 & 3.60 & 3.60 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix} m$$

$$P'_1 = \begin{bmatrix} 8.0000 \\ 3.5999 \\ 3.6001 \end{bmatrix} m \quad P'_2 = \begin{bmatrix} -8.0000 \\ 3.5999 \\ 3.6001 \end{bmatrix} m \quad P'_3 = \begin{bmatrix} -8.0000 \\ -3.6001 \\ 3.6001 \end{bmatrix} m \quad P'_4 = \begin{bmatrix} 8.0000 \\ -3.6001 \\ 3.6000 \end{bmatrix} m$$

Por lo tanto, los desplazamientos finales en los puntos correspondientes a las esquinas superiores de la fundación, son:

$$\begin{bmatrix} x_{f1} \\ y_{f1} \\ z_{f1} \end{bmatrix} := P'_1 - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} -0.06 \\ -76.16 \\ 54.10 \end{bmatrix} \mu s$$

$$\begin{bmatrix} x_{f2} \\ y_{f2} \\ z_{f2} \end{bmatrix} := P'_2 - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} -0.06 \\ -55.46 \\ 78.52 \end{bmatrix} \mu s$$

$$\begin{bmatrix} x_{f3} \\ y_{f3} \\ z_{f3} \end{bmatrix} := P'_3 - \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} -9.37 \\ -55.46 \\ 63.56 \end{bmatrix} \mu s$$

$$\begin{bmatrix} x_{f4} \\ y_{f4} \\ z_{f4} \end{bmatrix} := P'_4 - \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} -9.37 \\ -76.16 \\ 39.14 \end{bmatrix} \mu s$$

Con lo anterior los desplazamientos finales máximos ubicados en la parte superior de la fundación serán:

$$\Delta x_{f.máx} := \max(|x_{f1}|, |x_{f2}|, |x_{f3}|, |x_{f4}|) = 9.37 \mu s$$

$$\Delta y_{f.máx} := \max(|y_{f1}|, |y_{f2}|, |y_{f3}|, |y_{f4}|) = 76.16 \mu s$$

$$\Delta z_{f.máx} := \max(|z_{f1}|, |z_{f2}|, |z_{f3}|, |z_{f4}|) = 78.52 \mu s$$

I.3.4 Verificación de máximas amplitudes con las admisibles según tipo de equipo

Tabla I.4. Amplitudes admisibles según velocidad y tipo de máquina

TIPO DE MÁQUINA	AMPLITUDES ADMISIBLES EN MICRONES
FUNDACIONES PARA MÁQUINAS TIPO ROTATIVAS	
Máquinas de Velocidad Baja	
Velocidad de Operación (100 a 500 rpm)	200 a 80
Velocidad de Operación (500 a 1500 rpm)	80 a 40
Máquinas de Velocidad Media	
Velocidad de Operación (1500 a 3000 rpm)	40 a 20
Máquinas de Velocidad Alta	
Velocidad de Operación (3000 a 10000 rpm) y por encima de 10000 rpm	20 a 5
FUNDACIONES PARA MÁQUINAS TIPO RECÍPROCAS	
Velocidad de Operación (300 a 1500 rpm)	1000 a 200
Velocidad de Operación (100 a 300 rpm)	1000
FUNDACIONES PARA MÁQUINAS TIPO IMPACTO	
Fundaciones para Martillos	1000 a 4000

De acuerdo a esta tabla, para la velocidad $\omega = 450 \text{ rpm}$ de la máquina tipo rotativa y por interpolación lineal se obtiene una amplitud admisible de:

$$\Delta_{lim} = 95 \mu s$$

Fuente: Modificado de Bhatia (2008b)

$$\Delta x_{f.máx} = 9.37 \mu s < \Delta_{lim} = 95.00 \mu s \rightarrow \text{Verificación}_{\Delta x} = \text{"Cumple"}$$

$$\Delta y_{f.máx} = 76.16 \mu s < \Delta_{lim} = 95.00 \mu s \rightarrow \text{Verificación}_{\Delta y} = \text{"Cumple"}$$

$$\Delta z_{f.máx} = 78.52 \mu s < \Delta_{lim} = 95.00 \mu s \rightarrow \text{Verificación}_{\Delta z} = \text{"Cumple"}$$

I.4 ANÁLISIS DINÁMICO POR EL MÉTODO DE LA RESPUESTA MODAL

I.4.1 Verificación de resonancia y amplitudes de vibración en O (Modos z , ψ)

• Frecuencias naturales en los modos desacoplados (Modos z , ψ)

$$\begin{aligned}\omega_{nz} &:= \sqrt{\frac{K_z}{m}} = 34.79 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & \omega_{n\psi} &:= \sqrt{\frac{K_\psi}{I_{moz}}} = 60.59 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \omega_z &:= \omega_{nz} = 34.79 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & \rightarrow & f_z := \omega_z \cdot \frac{\text{rev}}{2 \cdot \pi \cdot \text{rad}} = 5.54 \text{ Hz} \\ \omega_\psi &:= \omega_{n\psi} = 60.59 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & \rightarrow & f_\psi := \omega_\psi \cdot \frac{\text{rev}}{2 \cdot \pi \cdot \text{rad}} = 9.64 \text{ Hz}\end{aligned}$$

• Verificación del riesgo de resonancia en los modos desacoplados (Modos z , ψ)

$$M_z := \left| 1 - \frac{f_z}{f} \right| \cdot 100\% = 26.17\%$$

Como el margen de frecuencia es: $M_z > 20\% \rightarrow \text{Resonancia}_z = \text{"No Existe"}$

$$M_\psi := \left| 1 - \frac{f_\psi}{f} \right| \cdot 100\% = 28.58\%$$

Como el margen de frecuencia es: $M_\psi > 20\% \rightarrow \text{Resonancia}_\psi = \text{"No Existe"}$

• Amplitud de vibración (movimiento vertical a lo largo del eje z)

$$\begin{aligned}\delta_z &:= \frac{F_{oz}}{K_z} = 49.11 \text{ } \mu\text{s} & \beta_z &:= \frac{\omega}{\omega_z} = 1.35 & \zeta_z &:= \frac{C_z}{2 \cdot \sqrt{K_z \cdot m}} = 0.55 \\ z_o &:= \frac{\delta_z}{\sqrt{(1 - \beta_z^2)^2 + (2 \cdot \zeta_z \cdot \beta_z)^2}} = 28.90 \text{ } \mu\text{s}\end{aligned}$$

• Amplitud de vibración (movimiento alrededor del eje z)

$$\begin{aligned}\delta_\psi &:= \frac{M_{o\psi}}{K_\psi} = -0.51 \text{ } \mu\text{rs} & \beta_\psi &:= \frac{\omega}{\omega_\psi} = 0.78 & \zeta_\psi &:= \frac{C_\psi}{2 \cdot \sqrt{K_\psi \cdot I_{moz}}} = 0.27 \\ \psi_o &:= \frac{\delta_\psi}{\sqrt{(1 - \beta_\psi^2)^2 + (2 \cdot \zeta_\psi \cdot \beta_\psi)^2}} = -0.89 \text{ } \mu\text{rs}\end{aligned}$$

I.4.2 Verificación de resonancia y amplitudes de vibración en O (Modos y , ϕ)

• Frecuencias naturales de los modos acoplados en el plano y-z (Modos y , ϕ)

Ecuación general de movimiento con acoplamiento dinámico en el plano y-z:

$$[M] \cdot [X''] + [C] \cdot [X'] + [K] \cdot [X] = [P_o] \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\begin{bmatrix} m & -m \cdot h \\ -m \cdot h & I_{mox} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y'' \\ \phi'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & C_\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y' \\ \phi' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_y & 0 \\ 0 & K_\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{oy} \\ M_{o\phi} \end{bmatrix} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{m}{kg} & \frac{-m \cdot h}{kg \cdot m} \\ \frac{-m \cdot h}{kg \cdot m} & \frac{I_{mox}}{kg \cdot m^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1529378.19 & -3791045.87 \\ -3791045.87 & 19668070.13 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{C_y}{N \cdot s \cdot m^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{C_\phi}{N \cdot m \cdot s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55443640.58 & 0.00 \\ 0.00 & 252119048.19 \end{bmatrix}$$

$$K := \begin{bmatrix} \frac{K_y}{N \cdot m^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{K_\phi}{N \cdot m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2137667900.86 & 0.00 \\ 0.00 & 35012899994.65 \end{bmatrix}$$

$$P_o := \begin{bmatrix} \frac{F_{oy}}{N} \\ \frac{M_{o\phi}}{N \cdot m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90900.00 \\ -509040.00 \end{bmatrix}$$

Haciendo uso de los autovalores o valores propios de un análisis dinámico, obtenemos el sistema transformado de coordenadas diferentes con los valores propios estándar a partir de la siguiente ecuación matricial de frecuencias: $[K - \lambda \cdot M] = 0$

$$\begin{bmatrix} \omega_{n2} \\ \omega_{n1} \end{bmatrix} := \left\| \begin{array}{l} A \leftarrow M^{-1} \cdot K \\ \lambda \leftarrow \text{eigenvals}(A) \\ \text{for } k \in 1 \dots \text{rows}(\lambda) \\ \left\| \begin{array}{l} \omega_k \leftarrow \sqrt{\lambda_k} \\ \omega \cdot \frac{rad}{s} \end{array} \right\| \end{array} \right\| = \begin{bmatrix} 71.85 \\ 30.38 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$$

Siendo las frecuencias límite:

$$\omega_{ny} = 37.39 \frac{rad}{s} \quad \omega_{n\phi} = 42.19 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_y = 30.38 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_y := \omega_y \cdot \frac{\text{rev}}{2 \cdot \pi \cdot \text{rad}} = 4.84 \text{ Hz}$$

$$\omega_\phi = 71.85 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_\phi := \omega_\phi \cdot \frac{\text{rev}}{2 \cdot \pi \cdot \text{rad}} = 11.44 \text{ Hz}$$

• Verificación del riesgo de resonancia en los modos acoplados (Modos y , ϕ)

$$M_y := \left| 1 - \frac{f_y}{f} \right| \cdot 100\% = 35.53\%$$

Como el margen de frecuencia es: $M_y > 20\% \rightarrow \text{Resonancia}_y = \text{"No Existe"}$

$$M_\phi := \left| 1 - \frac{f_\phi}{f} \right| \cdot 100\% = 52.47\%$$

Como el margen de frecuencia es: $M_\phi > 20\% \rightarrow \text{Resonancia}_\phi = \text{"No Existe"}$

• Cálculo de vectores propios normalizados en los modos acoplados (Modos y , ϕ)

$$\text{Primer Modo: } \lambda_{n1} := \omega_{n1}^2 = 922.95 \frac{1}{\text{s}^2} \rightarrow [K - \lambda_{n1} \cdot M] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Segundo Modo: } \lambda_{n2} := \omega_{n2}^2 = 5162.64 \frac{1}{\text{s}^2} \rightarrow [K - \lambda_{n2} \cdot M] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix} = 0$$

De este modo la matriz de vectores propios se obtiene de:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{21} & \varphi_{11} \\ \varphi_{22} & \varphi_{12} \end{bmatrix} := \left\| \begin{array}{l} A \leftarrow M^{-1} \cdot K \\ X \leftarrow \text{eigenvecs}(A) \\ \text{for } k \in 1 \dots \text{rows}(X) \\ \quad \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \dots \text{rows}(X) \\ \quad \left\| \begin{array}{l} X_{i,k} \\ x_{i,k} \leftarrow \frac{X_{i,k}}{X_{1,k}} \end{array} \right\| \\ \quad x \end{array} \right\| \end{array} \right\| = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 0.29 & -0.21 \end{bmatrix}$$

$$\varphi := \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 \\ -0.21 & 0.29 \end{bmatrix} \rightarrow \varphi_1 := \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ -0.21 \end{bmatrix} \quad \varphi_2 := \begin{bmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.29 \end{bmatrix}$$

Por tanto los vectores propios normalizados serán:

$$\text{Factor de escala para el primer modo: } FS_1 := \sqrt{\varphi_1^T \cdot M \cdot \varphi_1} = 1987.44$$

Factor de escala para el segundo modo: $FS_2 := \sqrt{\varphi_2^T \cdot M \cdot \varphi_2} = 1000.53$

$$\varphi_{n1} := \begin{bmatrix} \frac{\varphi_{11}}{FS_1} \\ \frac{\varphi_{12}}{FS_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.03 \cdot 10^{-4} \\ -1.04 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad \varphi_{n2} := \begin{bmatrix} \frac{\varphi_{21}}{FS_2} \\ \frac{\varphi_{22}}{FS_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.99 \cdot 10^{-4} \\ 2.94 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Con lo anterior, la matriz de vectores propios normalizada resulta:

$$\varphi_n := \begin{bmatrix} \frac{\varphi_{11}}{FS_1} & \frac{\varphi_{21}}{FS_2} \\ \frac{\varphi_{12}}{FS_1} & \frac{\varphi_{22}}{FS_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.03 \cdot 10^{-4} & 9.99 \cdot 10^{-4} \\ -1.04 \cdot 10^{-4} & 2.94 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

• **Corrección de la matriz de amortiguamiento por coeficientes de Rayleigh**

Aplicando el método de análisis aproximado para desacoplar las ecuaciones con amortiguamiento no proporcional a la masa ni a la rigidez del sistema, es decir, desacoplando bajo la transformación ortogonal, obtenemos:

$$C = \begin{bmatrix} 55443640.58 & 0.00 \\ 0.00 & 252119048.19 \end{bmatrix}$$

Para el primer modo: $\zeta_1 := \frac{\varphi_{n1}^T \cdot C \cdot \varphi_{n1}}{2 \cdot \omega_{n1} \cdot S} = 0.276$

Para el segundo modo: $\zeta_2 := \frac{\varphi_{n2}^T \cdot C \cdot \varphi_{n2}}{2 \cdot \omega_{n2} \cdot S} = 0.537$

Considerando el amortiguamiento proporcional de Rayleigh se tiene:

$$[C_R] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K]$$

Para hallar los valores de las constantes α y β se tiene las siguientes expresiones:

$$\alpha + \beta \cdot \omega_{n1}^2 = 2 \cdot \zeta_1 \cdot \omega_{n1} \quad \gamma \quad \alpha + \beta \cdot \omega_{n2}^2 = 2 \cdot \zeta_2 \cdot \omega_{n2}$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores simultáneamente, se tiene:

$$\alpha = 3.6374 \quad \beta = 0.0142$$

Sustituyendo en la expresión de amortiguamiento de Rayleigh, obtenemos:

$$C_R := \alpha \cdot M + \beta \cdot K = \begin{bmatrix} 36015793.00 & -13789561.41 \\ -13789561.41 & 570328104.09 \end{bmatrix}$$

Verificación de la diagonalización con la matriz de amortiguamiento corregido:

$$\varphi_n^T \cdot C \cdot \varphi_n = \begin{bmatrix} 16.79 & 20.14 \\ 20.14 & 77.18 \end{bmatrix} \rightarrow \varphi_n^T \cdot C_R \cdot \varphi_n = \begin{bmatrix} 16.79 & 0.00 \\ 0.00 & 77.18 \end{bmatrix}$$

• **Amplitudes de vibración en el plano y-z (movimiento en direcciones y , ϕ)**

Con la transformación ortogonal, podemos escribir la ecuación matricial de movimiento desacoplado como:

$$[\varphi_n]^T \cdot [M] \cdot [\varphi_n] \cdot [X''] + [\varphi_n]^T \cdot [C_R] \cdot [\varphi_n] \cdot [X'] + [\varphi_n]^T \cdot [K] \cdot [\varphi_n] \cdot [X] = [\varphi_n]^T \cdot [P_o]$$

De lo anterior obtenemos:

$$\xi_1'' + 2 \cdot \zeta_1 \cdot \omega_{n1} \cdot \xi_1' + \omega_{n1}^2 \cdot \xi_1 = f_{oy} \quad \vee \quad \xi_2'' + 2 \cdot \zeta_2 \cdot \omega_{n2} \cdot \xi_2' + \omega_{n2}^2 \cdot \xi_2 = m_{o\phi}$$

Donde:

$$k_1 := \omega_{n1}^2 \cdot s^2 = 922.95 \quad k_2 := \omega_{n2}^2 \cdot s^2 = 5162.64 \quad \begin{bmatrix} f_{oy} \\ m_{o\phi} \end{bmatrix} := \varphi_n^T \cdot P_o = \begin{bmatrix} 98.89 \\ -58.83 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 := \frac{\omega}{\omega_{n1}} = 1.55 \quad \beta_2 := \frac{\omega}{\omega_{n2}} = 0.66 \quad \zeta_1 = 0.276 \quad \zeta_2 = 0.537$$

Siendo las amplitudes:

$$\xi_1 := \frac{f_{oy}}{k_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)^2 + (2 \cdot \zeta_1 \cdot \beta_1)^2}} = 0.0651$$

$$\xi_2 := \frac{m_{o\phi}}{k_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_2^2)^2 + (2 \cdot \zeta_2 \cdot \beta_2)^2}} = -0.0126$$

Finalmente retornando a las coordenadas originales del sistema, se obtienen:

$$\begin{bmatrix} \xi_y \\ \xi_\phi \end{bmatrix} := \varphi_n \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.02 \cdot 10^{-5} \\ -1.05 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$y_o := \xi_y \cdot m = 20.17 \text{ } \mu s \quad \phi_o := \xi_\phi \cdot rad = -10.49 \text{ } \mu rs$$

I.4.3 Verificación de resonancia y amplitudes de vibración en O (Modos x , θ)

• Frecuencias naturales de los modos acoplados en el plano x-z (Modos x , θ)

Ecuación general de movimiento con acoplamiento dinámico en el plano x-z:

$$[M] \cdot [X''] + [C] \cdot [X'] + [K] \cdot [X] = [P_o] \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\begin{bmatrix} m & m \cdot h \\ m \cdot h & I_{moy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'' \\ \theta'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ \theta' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ox} \\ M_{o\theta} \end{bmatrix} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{m}{kg} & \frac{m \cdot h}{kg \cdot m} \\ \frac{m \cdot h}{kg \cdot m} & \frac{I_{moy}}{kg \cdot m^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1529378.19 & 3791045.87 \\ 3791045.87 & 43622903.98 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{C_x}{N \cdot s \cdot m^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{C_\theta}{N \cdot m \cdot s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55443640.58 & 0.00 \\ 0.00 & 1130201929.55 \end{bmatrix}$$

$$K := \begin{bmatrix} \frac{K_x}{N \cdot m^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{K_\theta}{N \cdot m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2137667900.86 & 0.00 \\ 0.00 & 86899151509.82 \end{bmatrix}$$

$$P_o := \begin{bmatrix} \frac{F_{ox}}{N} \\ \frac{M_{o\theta}}{N \cdot m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 72944.00 \end{bmatrix}$$

Haciendo uso de los autovalores o valores propios de un análisis dinámico, obtenemos el sistema transformado de coordenadas diferentes con los valores propios estándar a partir de la siguiente ecuación matricial de frecuencias: $[K - \lambda \cdot M] = 0$

$$\begin{bmatrix} \omega_{n2} \\ \omega_{n1} \end{bmatrix} := \left\| \begin{array}{l} A \leftarrow M^{-1} \cdot K \\ \lambda \leftarrow \text{eigenvals}(A) \\ \text{for } k \in 1 \dots \text{rows}(\lambda) \\ \left\| \begin{array}{l} \omega_k \leftarrow \sqrt{\lambda_k} \\ \omega \cdot \frac{rad}{s} \end{array} \right\| \end{array} \right\| = \begin{bmatrix} 56.72 \\ 33.21 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$$

Siendo las frecuencias límite:

$$\omega_{nx} = 37.39 \frac{rad}{s} \quad \omega_{n\theta} = 44.63 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_x = 33.21 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_x := \omega_x \cdot \frac{\text{rev}}{2 \cdot \pi \cdot \text{rad}} = 5.29 \text{ Hz}$$

$$\omega_\theta = 56.72 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_\theta := \omega_\theta \cdot \frac{\text{rev}}{2 \cdot \pi \cdot \text{rad}} = 9.03 \text{ Hz}$$

• Verificación del riesgo de resonancia en los modos acoplados (Modos x , θ)

$$M_x := \left| 1 - \frac{f_x}{f} \right| \cdot 100\% = 29.52\%$$

Como el margen de frecuencia es: $M_x > 20\% \rightarrow \text{Resonancia}_x = \text{"No Existe"}$

$$M_\theta := \left| 1 - \frac{f_\theta}{f} \right| \cdot 100\% = 20.37\%$$

Como el margen de frecuencia es: $M_\theta > 20\% \rightarrow \text{Resonancia}_\theta = \text{"No Existe"}$

• Cálculo de vectores propios normalizados en los modos acoplados (Modos x , θ)

$$\text{Primer Modo: } \lambda_{n1} := \omega_{n1}^2 = 1102.97 \frac{1}{\text{s}^2} \rightarrow [K - \lambda_{n1} \cdot M] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Segundo Modo: } \lambda_{n2} := \omega_{n2}^2 = 3217.55 \frac{1}{\text{s}^2} \rightarrow [K - \lambda_{n2} \cdot M] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix} = 0$$

De este modo la matriz de vectores propios se obtiene de:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{21} & \varphi_{11} \\ \varphi_{22} & \varphi_{12} \end{bmatrix} := \left\| \begin{array}{l} A \leftarrow M^{-1} \cdot K \\ X \leftarrow \text{eigenvecs}(A) \\ \text{for } k \in 1 \dots \text{rows}(X) \\ \quad \text{for } i \in 1 \dots \text{rows}(X) \\ \quad \quad X_{i,k} \\ \quad \quad x_{i,k} \leftarrow \frac{X_{i,k}}{X_{1,k}} \end{array} \right\| = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 \\ -0.23 & 0.11 \end{bmatrix}$$

$$\varphi := \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 0.11 & -0.23 \end{bmatrix} \rightarrow \varphi_1 := \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.11 \end{bmatrix} \quad \varphi_2 := \begin{bmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ -0.23 \end{bmatrix}$$

Por tanto los vectores propios normalizados serán:

$$\text{Factor de escala para el primer modo: } FS_1 := \sqrt{\varphi_1^T \cdot M \cdot \varphi_1} = 1689.34$$

Factor de escala para el segundo modo: $FS_2 := \sqrt{\varphi_2^T \cdot M \cdot \varphi_2} = 1438.90$

$$\varphi_{n1} := \begin{bmatrix} \frac{\varphi_{11}}{FS_1} \\ \frac{\varphi_{12}}{FS_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.92 \cdot 10^{-4} \\ 6.38 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \varphi_{n2} := \begin{bmatrix} \frac{\varphi_{21}}{FS_2} \\ \frac{\varphi_{22}}{FS_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.95 \cdot 10^{-4} \\ -1.59 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Con lo anterior, la matriz de vectores propios normalizada resulta:

$$\varphi_n := \begin{bmatrix} \frac{\varphi_{11}}{FS_1} & \frac{\varphi_{21}}{FS_2} \\ \frac{\varphi_{12}}{FS_1} & \frac{\varphi_{22}}{FS_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.92 \cdot 10^{-4} & 6.95 \cdot 10^{-4} \\ 6.38 \cdot 10^{-5} & -1.59 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

• **Corrección de la matriz de amortiguamiento por coeficientes de Rayleigh**

Aplicando el método de análisis aproximado para desacoplar las ecuaciones con amortiguamiento no proporcional a la masa ni a la rigidez del sistema, es decir, desacoplando bajo la transformación ortogonal, obtenemos:

$$C = \begin{bmatrix} 55443640.58 & 0.00 \\ 0.00 & 1130201929.55 \end{bmatrix}$$

Para el primer modo: $\zeta_1 := \frac{\varphi_{n1}^T \cdot C \cdot \varphi_{n1}}{2 \cdot \omega_{n1} \cdot S} = 0.362$

Para el segundo modo: $\zeta_2 := \frac{\varphi_{n2}^T \cdot C \cdot \varphi_{n2}}{2 \cdot \omega_{n2} \cdot S} = 0.487$

Considerando el amortiguamiento proporcional de Rayleigh se tiene:

$$[C_R] = \alpha \cdot [M] + \beta \cdot [K]$$

Para hallar los valores de las constantes α y β se tiene las siguientes expresiones:

$$\alpha + \beta \cdot \omega_{n1}^2 = 2 \cdot \zeta_1 \cdot \omega_{n1} \quad \gamma \quad \alpha + \beta \cdot \omega_{n2}^2 = 2 \cdot \zeta_2 \cdot \omega_{n2}$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores simultáneamente, se tiene:

$$\alpha = 7.7740 \quad \beta = 0.0147$$

Sustituyendo en la expresión de amortiguamiento de Rayleigh, obtenemos:

$$C_R := \alpha \cdot M + \beta \cdot K = \begin{bmatrix} 43396523.63 & 29471433.81 \\ 29471433.81 & 1619933866.44 \end{bmatrix}$$

Verificación de la diagonalización con la matriz de amortiguamiento corregido:

$$\varphi_n^T \cdot C \cdot \varphi_n = \begin{bmatrix} 24.03 & 11.37 \\ 11.37 & 55.20 \end{bmatrix} \rightarrow \varphi_n^T \cdot C_R \cdot \varphi_n = \begin{bmatrix} 24.03 & 0.00 \\ 0.00 & 55.20 \end{bmatrix}$$

• **Amplitudes de vibración en el plano x-z (movimiento en direcciones x , θ)**

Con la transformación ortogonal, podemos escribir la ecuación matricial de movimiento desacoplado como:

$$[\varphi_n]^T \cdot [M] \cdot [\varphi_n] \cdot [X''] + [\varphi_n]^T \cdot [C_R] \cdot [\varphi_n] \cdot [X'] + [\varphi_n]^T \cdot [K] \cdot [\varphi_n] \cdot [X] = [\varphi_n]^T \cdot [P_o]$$

De lo anterior obtenemos:

$$\xi_1'' + 2 \cdot \zeta_1 \cdot \omega_{n1} \cdot \xi_1' + \omega_{n1}^2 \cdot \xi_1 = f_{ox} \quad \gamma \quad \xi_2'' + 2 \cdot \zeta_2 \cdot \omega_{n2} \cdot \xi_2' + \omega_{n2}^2 \cdot \xi_2 = m_{o\theta}$$

Donde:

$$k_1 := \omega_{n1}^2 \cdot s^2 = 1102.97 \quad k_2 := \omega_{n2}^2 \cdot s^2 = 3217.55 \quad \begin{bmatrix} f_{ox} \\ m_{o\theta} \end{bmatrix} := \varphi_n^T \cdot P_o = \begin{bmatrix} 4.66 \\ -11.57 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 := \frac{\omega}{\omega_{n1}} = 1.42 \quad \beta_2 := \frac{\omega}{\omega_{n2}} = 0.83 \quad \zeta_1 = 0.362 \quad \zeta_2 = 0.487$$

Siendo las amplitudes:

$$\xi_1 := \frac{f_{ox}}{k_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)^2 + (2 \cdot \zeta_1 \cdot \beta_1)^2}} = 0.0029$$

$$\xi_2 := \frac{m_{o\theta}}{k_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_2^2)^2 + (2 \cdot \zeta_2 \cdot \beta_2)^2}} = -0.0042$$

Finalmente retornando a las coordenadas originales del sistema, se obtienen:

$$\begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_\theta \end{bmatrix} := \varphi_n \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.15 \cdot 10^{-6} \\ 8.45 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$x_o := \xi_x \cdot m = -1.15 \mu s \quad \theta_o := \xi_\theta \cdot rad = 0.85 \mu rs$$

I.4.4 Máximas amplitudes de vibración en la parte superior de la fundación

Los vectores Punto de los bordes superiores de la fundación respecto al centro de rigidez O son:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.5 L \\ 0.5 \cdot B \\ H \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m} = \begin{bmatrix} 8.00 \\ 3.60 \\ 3.60 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -0.5 L \\ 0.5 \cdot B \\ H \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m} = \begin{bmatrix} -8.00 \\ 3.60 \\ 3.60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -0.5 L \\ -0.5 \cdot B \\ H \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m} = \begin{bmatrix} -8.00 \\ -3.60 \\ 3.60 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.5 L \\ -0.5 \cdot B \\ H \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m} = \begin{bmatrix} 8.00 \\ -3.60 \\ 3.60 \end{bmatrix}$$

Aplicando las formulaciones de transformaciones geométricas, obtenemos la nueva ubicación de los puntos referidos a los bordes superiores de la fundación:

$$P'_1 = \begin{bmatrix} 8.0000 \\ 3.6001 \\ 3.6000 \end{bmatrix} m \quad P'_2 = \begin{bmatrix} -8.0000 \\ 3.6001 \\ 3.6000 \end{bmatrix} m \quad P'_3 = \begin{bmatrix} -8.0000 \\ -3.5999 \\ 3.6001 \end{bmatrix} m \quad P'_4 = \begin{bmatrix} 8.0000 \\ -3.5999 \\ 3.6001 \end{bmatrix} m$$

Por lo tanto, los desplazamientos finales en los puntos correspondientes a las esquinas superiores de la fundación, son:

$$\begin{bmatrix} x_{f1} \\ y_{f1} \\ z_{f1} \end{bmatrix} := P'_1 - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} 5.11 \\ 50.79 \\ -15.63 \end{bmatrix} \mu s \quad \begin{bmatrix} x_{f2} \\ y_{f2} \\ z_{f2} \end{bmatrix} := P'_2 - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} 5.11 \\ 65.10 \\ -2.11 \end{bmatrix} \mu s$$

$$\begin{bmatrix} x_{f3} \\ y_{f3} \\ z_{f3} \end{bmatrix} := P'_3 - \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} -1.33 \\ 65.10 \\ 73.43 \end{bmatrix} \mu s \quad \begin{bmatrix} x_{f4} \\ y_{f4} \\ z_{f4} \end{bmatrix} := P'_4 - \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} -1.33 \\ 50.79 \\ 59.91 \end{bmatrix} \mu s$$

Con lo anterior los desplazamientos finales máximos ubicados en la parte superior de la fundación serán:

$$\Delta x_{f,máx} := \max(|x_{f1}|, |x_{f2}|, |x_{f3}|, |x_{f4}|) = 5.11 \mu s$$

$$\Delta y_{f,máx} := \max(|y_{f1}|, |y_{f2}|, |y_{f3}|, |y_{f4}|) = 65.10 \mu s$$

$$\Delta z_{f,máx} := \max(|z_{f1}|, |z_{f2}|, |z_{f3}|, |z_{f4}|) = 73.43 \mu s$$

I.4.5 Verificación de máximas amplitudes con las admisibles según tipo de equipo

Para la velocidad $\omega = 450 \text{ rpm}$ de la máquina tipo rotativa, se obtiene una amplitud admisible de:

$$\Delta_{lim} = 95.00 \mu s$$

$$\Delta x_{f,m\acute{a}x} = 5.11 \text{ } \mu s < \Delta_{l\acute{i}m} = 95.00 \text{ } \mu s \rightarrow \textit{Verificaci3n}_{\Delta x} = \text{“Cumple”}$$

$$\Delta y_{f,m\acute{a}x} = 65.10 \text{ } \mu s < \Delta_{l\acute{i}m} = 95.00 \text{ } \mu s \rightarrow \textit{Verificaci3n}_{\Delta y} = \text{“Cumple”}$$

$$\Delta z_{f,m\acute{a}x} = 73.43 \text{ } \mu s < \Delta_{l\acute{i}m} = 95.00 \text{ } \mu s \rightarrow \textit{Verificaci3n}_{\Delta z} = \text{“Cumple”}$$

I.5 ANÁLISIS DINÁMICO POR EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN DIRECTA

I.5.1 Amplitudes de vibración en O modos desacoplados (Modos z , ψ)

• Amplitud de vibración (movimiento vertical a lo largo del eje z)

Ecuación de movimiento de un sistema desacoplado amortiguado forzado:

$$m \cdot z'' + C_z \cdot z' + K_z \cdot z = F_{oz} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Donde: $m = 1529378.19 \text{ } kg$ $F_{oz} = 90.90 \text{ } kN$

$$C_z = 58134.64 \frac{kN \cdot s}{m} \quad K_z = 1851096.81 \frac{kN}{m}$$

Selección del paso de tiempo: $T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 0.133333 \text{ } s \rightarrow \Delta t := \frac{T}{80} = 0.001667 \text{ } s$

$$N_{pasos} := 1200 \quad i := 0 \dots N_{pasos} \quad t_i := i \cdot \Delta t \quad \omega = 47.12 \frac{rad}{s}$$

$$F_z(t) := F_{oz} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad Fz_i := F_z(t_i)$$

Condiciones iniciales: $z_0 := 0.00 \text{ } m$ $z'_0 := 0.00 \frac{m}{s}$ $z''_0 := 0.00 \frac{m}{s^2}$

Cálculos iniciales: $z_{-1} := z_0 - \Delta t \cdot z'_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot z''_0 = 0.00 \text{ } m$

$$K_e := \frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{C_z}{2 \cdot \Delta t} = 568016539.46 \frac{kN}{m}$$

$$A_m := \frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{C_z}{2 \cdot \Delta t} = 533135754.11 \frac{kN}{m}$$

$$B_m := K_z - \frac{2 \cdot m}{(\Delta t)^2} = -1099301196.77 \frac{kN}{m}$$

Definición de la expresión de desplazamiento:
$$z_{i+1} = \frac{(Fz_i - A_m \cdot z_{i-1} - B_m \cdot z_i)}{K_e}$$

$$\begin{array}{ccc}
 i = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ \vdots \\ 1200 \end{array} \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 2.0 \\ 3.0 \\ 4.0 \\ 5.0 \\ 6.0 \\ 7.0 \\ 8.0 \\ 9.0 \\ 10.0 \\ \vdots \end{bmatrix} & t = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ \vdots \\ 1200 \end{array} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.00167 \\ 0.00333 \\ 0.00500 \\ 0.00667 \\ 0.00833 \\ 0.01000 \\ 0.01167 \\ 0.01333 \\ 0.01500 \\ 0.01667 \\ \vdots \end{bmatrix} s & z = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ \vdots \\ 1200 \end{array} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.01256 \\ 0.04933 \\ 0.12105 \\ 0.23742 \\ 0.40711 \\ 0.63771 \\ 0.93569 \\ 1.30638 \\ 1.75398 \\ 2.28154 \\ \vdots \end{bmatrix} \mu s \\
 \\
 t_{N_{pasos}+1} = 2.00 \text{ s} & N_{pasos} \cdot \Delta t = 2.00 \text{ s} & z_{N_{pasos}+1} = -26.24 \mu s \\
 \\
 t := \frac{t}{s} & & z := \frac{z}{\mu s}
 \end{array}$$

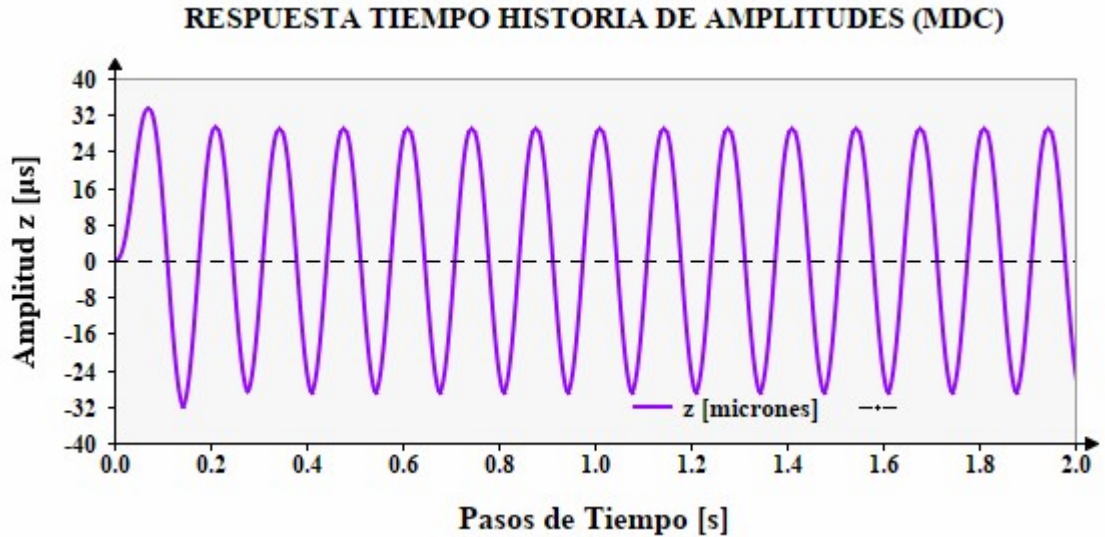


Figura I.5. Gráfica amplitud de vibración en z Método de la Diferencia Central (MDC)

Sacando el máximo valor de la gráfica anterior, para la amplitud de vibración vertical a lo largo del eje z, obtenemos:

$$z_o = 28.91 \mu s$$

• **Amplitud de vibración (movimiento alrededor del eje z)**

Ecuación de movimiento de un sistema desacoplado amortiguado forzado:

$$I_{moz} \cdot \psi'' + C_{\psi} \cdot \psi' + K_{\psi} \cdot \psi = M_{o\psi} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Donde: $I_{moz} = 38868257.70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $M_{o\psi} = -72.94 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$C_{\psi} = 1251448.80 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ $K_{\psi} = 142701186.91 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Selección del paso de tiempo: $T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 0.133333 \text{ s} \rightarrow \Delta t := \frac{T}{80} = 0.001667 \text{ s}$

$N_{pasos} := 1200$ $i := 0 \dots N_{pasos}$ $t_i := i \cdot \Delta t$ $\omega = 47.12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$M_{\psi}(t) := M_{o\psi} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ $M\psi_i := M_{\psi}(t_i)$

Condiciones iniciales: $\psi_0 := 0.00 \text{ rad}$ $\psi'_0 := 0.00 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $\psi''_0 := 0.00 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

Cálculos iniciales: $\psi_{-1} := \psi_0 - \Delta t \cdot \psi'_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot \psi''_0 = 0.00 \text{ rad}$

$K_e := \frac{I_{moz}}{(\Delta t)^2} + \frac{C_{\psi}}{2 \cdot \Delta t} = 14368007409.64 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$A_m := \frac{I_{moz}}{(\Delta t)^2} - \frac{C_{\psi}}{2 \cdot \Delta t} = 13617138131.64 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$B_m := K_{\psi} - \frac{2 \cdot I_{moz}}{(\Delta t)^2} = -27842444354.37 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Definición de la expresión de desplazamiento:

$$\psi_{i+1} = \frac{(M\psi_i - A_m \cdot \psi_{i-1} - B_m \cdot \psi_i)}{K_e}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} i = \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ \vdots \\ 1200 \end{array} \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 2.0 \\ 3.0 \\ 4.0 \\ 5.0 \\ 6.0 \\ 7.0 \\ 8.0 \\ 9.0 \\ 10.0 \\ 11.0 \\ \vdots \end{bmatrix} &
 \begin{array}{c} t = \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ \vdots \\ 1200 \end{array} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.00167 \\ 0.00333 \\ 0.00500 \\ 0.00667 \\ 0.00833 \\ 0.01000 \\ 0.01167 \\ 0.01333 \\ 0.01500 \\ 0.01667 \\ 0.01833 \\ \vdots \end{bmatrix} s &
 \begin{array}{c} \psi = \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ \vdots \\ 1200 \end{array} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ -0.00040 \\ -0.00157 \\ -0.00384 \\ -0.00753 \\ -0.01289 \\ -0.02015 \\ -0.02949 \\ -0.04102 \\ -0.05485 \\ -0.07099 \\ -0.08945 \\ \vdots \end{bmatrix} \mu rs
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 t_{N_{pasos}+1} = 2.00 \text{ s} & N_{pasos} \cdot \Delta t = 2.00 \text{ s} & \psi_{N_{pasos}+1} = 0.60 \mu rs \\
 t := \frac{t}{s} & & \psi := \frac{\psi}{\mu rs}
 \end{array}$$

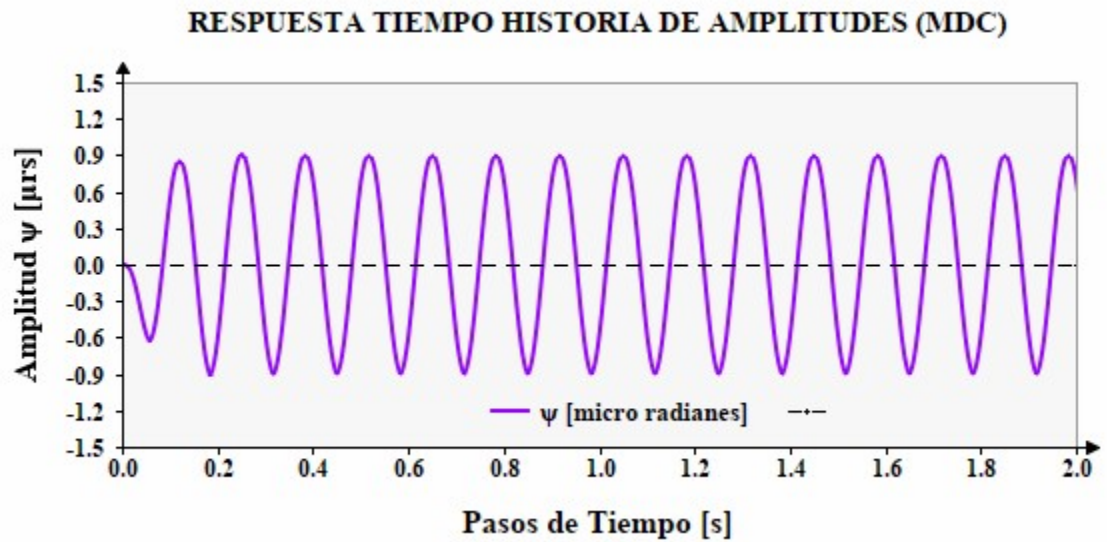


Figura I.6. Gráfica amplitud de vibración en ψ Método de la Diferencia Central (MDC)

Sacando el máximo valor de la gráfica anterior, para la amplitud de vibración alrededor del eje z, obtenemos:

$$\psi_o = -0.89 \mu rs$$

I.5.2 Amplitudes de vibración en O modos acoplados (Modos y , ϕ)

• Amplitudes de vibración en el plano y-z (movimiento en direcciones y , ϕ)

Ecuación general de movimiento con acoplamiento dinámico en el plano y-z:

$$[M] \cdot [X''] + [C] \cdot [X'] + [K] \cdot [X] = [P_o] \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\begin{bmatrix} m & -m \cdot h \\ -m \cdot h & I_{mox} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y'' \\ \phi'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & C_\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y' \\ \phi' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_y & 0 \\ 0 & K_\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{oy} \\ M_{o\phi} \end{bmatrix} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Donde:

$$M := \begin{bmatrix} \frac{m}{kg} & \frac{-m \cdot h}{kg \cdot m} \\ \frac{-m \cdot h}{kg \cdot m} & \frac{I_{mox}}{kg \cdot m^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1529378.19 & -3791045.87 \\ -3791045.87 & 19668070.13 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{C_y}{N \cdot s \cdot m^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{C_\phi}{N \cdot m \cdot s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55443640.58 & 0.00 \\ 0.00 & 252119048.19 \end{bmatrix}$$

$$K := \begin{bmatrix} \frac{K_y}{N \cdot m^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{K_\phi}{N \cdot m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2137667900.86 & 0.00 \\ 0.00 & 35012899994.65 \end{bmatrix}$$

$$P_o := \begin{bmatrix} \frac{F_{oy}}{N} \\ \frac{M_{o\phi}}{N \cdot m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90900.00 \\ -509040.00 \end{bmatrix}$$

Selección del paso de tiempo: $T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 0.133333 \text{ s} \rightarrow \Delta t := \frac{T}{80 \cdot s} = 0.001667$

$$N_{pasos} := 1200 \quad i := 0 \dots N_{pasos} \quad t_i := i \cdot \Delta t \quad \frac{\omega}{s^{-1}} = 47.12$$

$$M = \begin{bmatrix} 1529378.19 & -3791045.87 \\ -3791045.87 & 19668070.13 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 55443640.58 & 0.00 \\ 0.00 & 252119048.19 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2137667900.86 & 0.00 \\ 0.00 & 35012899994.65 \end{bmatrix} \quad P(t) := P_o \cdot \sin\left(\frac{\omega}{s^{-1}} \cdot t\right) \quad P_i := P(t_i)$$

Condiciones iniciales:

$$\mathbf{U}_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}'_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}''_0 := \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{P}(0) - \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}'_0 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_0) = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

Cálculos iniciales:

$$\mathbf{U}_{-1} := \mathbf{U}_0 - \Delta t \cdot \mathbf{U}'_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot \mathbf{U}''_0 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_e := \frac{1}{(\Delta t)^2} \cdot \mathbf{M} + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 567209238963.08 & -1364776513761.47 \\ -1364776513761.47 & 7156140962162.01 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_m := \frac{1}{(\Delta t)^2} \cdot \mathbf{M} - \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 533943054614.90 & -1364776513761.47 \\ -1364776513761.47 & 7004869533250.83 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_m := \mathbf{K} - \frac{2}{(\Delta t)^2} \cdot \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1099014625677.13 & 2729553027522.94 \\ 2729553027522.94 & -14125997595418.20 \end{bmatrix}$$

Definición de la expresión de desplazamiento:

$$\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{K}_e^{-1} \cdot (\mathbf{P}_i - \mathbf{A}_m \cdot \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{U}_i)$$

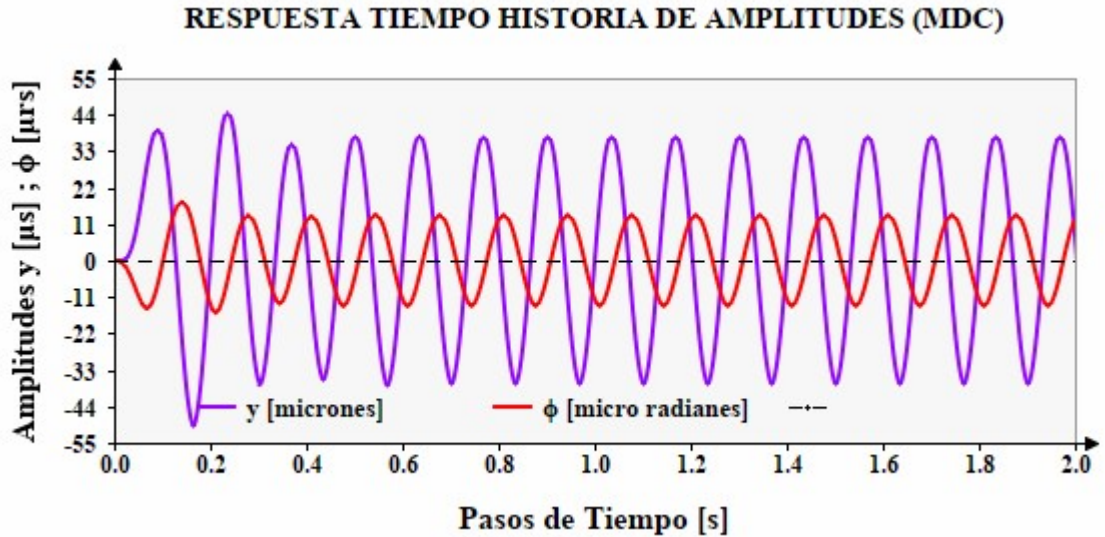


Figura I.7. Gráfica de amplitudes de vibración en direcciones (y , ϕ) (MDC)

Sacando los máximos valores de la gráfica anterior, para las amplitudes de vibración en las direcciones de movimiento (y , ϕ), obtenemos:

$$y_o = 37.23 \text{ } \mu\text{s} \quad \phi_o = -13.57 \text{ } \mu\text{rs}$$

I.5.3 Amplitudes de vibración en O modos acoplados (Modos x , θ)

• Amplitudes de vibración en el plano x-z (movimiento en direcciones x , θ)

Ecuación general de movimiento con acoplamiento dinámico en el plano x-z:

$$[M] \cdot [X''] + [C] \cdot [X'] + [K] \cdot [X] = [P_o] \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\begin{bmatrix} m & m \cdot h \\ m \cdot h & I_{moy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'' \\ \theta'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ \theta' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ox} \\ M_{o\theta} \end{bmatrix} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Donde:

$$M := \begin{bmatrix} \frac{m}{kg} & \frac{m \cdot h}{kg \cdot m} \\ \frac{m \cdot h}{kg \cdot m} & \frac{I_{moy}}{kg \cdot m^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1529378.19 & 3791045.87 \\ 3791045.87 & 43622903.98 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{C_x}{N \cdot s \cdot m^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{C_\theta}{N \cdot m \cdot s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55443640.58 & 0.00 \\ 0.00 & 1130201929.55 \end{bmatrix}$$

$$K := \begin{bmatrix} \frac{K_x}{N \cdot m^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{K_\theta}{N \cdot m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2137667900.86 & 0.00 \\ 0.00 & 86899151509.82 \end{bmatrix}$$

$$P_o := \begin{bmatrix} \frac{F_{ox}}{N} \\ \frac{M_{o\theta}}{N \cdot m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 72944.00 \end{bmatrix}$$

Selección del paso de tiempo: $T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 0.133333 \text{ s} \rightarrow \Delta t := \frac{T}{80 \cdot s} = 0.001667$

$$N_{pasos} := 1200 \quad i := 0 \dots N_{pasos} \quad t_i := i \cdot \Delta t \quad \frac{\omega}{s^{-1}} = 47.12$$

$$M = \begin{bmatrix} 1529378.19 & 3791045.87 \\ 3791045.87 & 43622903.98 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 55443640.58 & 0.00 \\ 0.00 & 1130201929.55 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2137667900.86 & 0.00 \\ 0.00 & 86899151509.82 \end{bmatrix} \quad P(t) := P_o \cdot \sin\left(\frac{\omega}{s^{-1}} \cdot t\right) \quad P_i := P(t_i)$$

Condiciones iniciales:

$$\mathbf{U}_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}'_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}''_0 := \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{P}(0) - \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}'_0 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_0) = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

Cálculos iniciales:

$$\mathbf{U}_{-1} := \mathbf{U}_0 - \Delta t \cdot \mathbf{U}'_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot \mathbf{U}''_0 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_e := \frac{1}{(\Delta t)^2} \cdot \mathbf{M} + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 567209238963.08 & 1364776513761.47 \\ 1364776513761.47 & 16043306010056.90 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_m := \frac{1}{(\Delta t)^2} \cdot \mathbf{M} - \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 533943054614.90 & 1364776513761.47 \\ 1364776513761.47 & 15365184852328.40 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_m := \mathbf{K} - \frac{2}{(\Delta t)^2} \cdot \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1099014625677.13 & -2729553027522.94 \\ -2729553027522.94 & -31321591710875.50 \end{bmatrix}$$

Definición de la expresión de desplazamiento:

$$\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{K}_e^{-1} \cdot (\mathbf{P}_i - \mathbf{A}_m \cdot \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{U}_i)$$

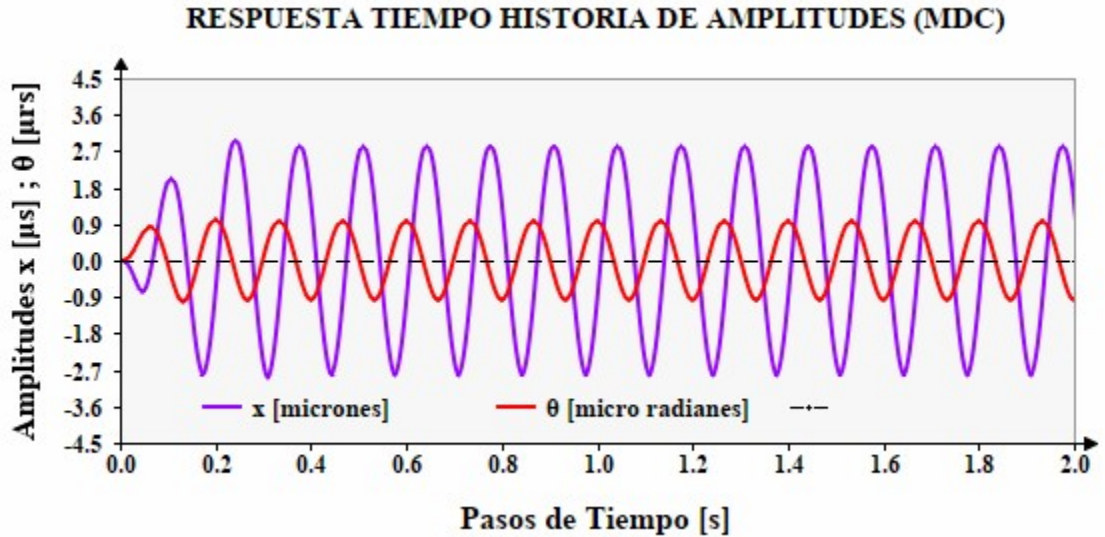


Figura I.8. Gráfica de amplitudes de vibración en direcciones (x , θ) (MDC)

Sacando los máximos valores de la gráfica anterior, para las amplitudes de vibración en las direcciones de movimiento (x , θ), obtenemos:

$$x_o = -2.82 \text{ } \mu s \quad \theta_o = 0.97 \text{ } \mu rs$$

I.5.4 Máximas amplitudes de vibración en la parte superior de la fundación

Los vectores Punto de los bordes superiores de la fundación respecto al centro de rigidez O son:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.5 L \\ 0.5 \cdot B \\ H \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m} = \begin{bmatrix} 8.00 \\ 3.60 \\ 3.60 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -0.5 L \\ 0.5 \cdot B \\ H \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m} = \begin{bmatrix} -8.00 \\ 3.60 \\ 3.60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -0.5 L \\ -0.5 \cdot B \\ H \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m} = \begin{bmatrix} -8.00 \\ -3.60 \\ 3.60 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.5 L \\ -0.5 \cdot B \\ H \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{m} = \begin{bmatrix} 8.00 \\ -3.60 \\ 3.60 \end{bmatrix}$$

Aplicando las formulaciones de transformaciones geométricas, obtenemos la nueva ubicación de los puntos referidos a los bordes superiores de la fundación:

$$P'_1 = \begin{bmatrix} 8.0000 \\ 3.6001 \\ 3.6000 \end{bmatrix} m \quad P'_2 = \begin{bmatrix} -8.0000 \\ 3.6001 \\ 3.6000 \end{bmatrix} m \quad P'_3 = \begin{bmatrix} -8.0000 \\ -3.5999 \\ 3.6001 \end{bmatrix} m \quad P'_4 = \begin{bmatrix} 8.0000 \\ -3.5999 \\ 3.6001 \end{bmatrix} m$$

Por lo tanto, los desplazamientos finales en los puntos correspondientes a las esquinas superiores de la fundación, son:

$$\begin{bmatrix} x_{f1} \\ y_{f1} \\ z_{f1} \end{bmatrix} := P'_1 - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} 3.89 \\ 78.93 \\ -27.70 \end{bmatrix} \mu s \quad \begin{bmatrix} x_{f2} \\ y_{f2} \\ z_{f2} \end{bmatrix} := P'_2 - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} 3.89 \\ 93.23 \\ -12.19 \end{bmatrix} \mu s$$

$$\begin{bmatrix} x_{f3} \\ y_{f3} \\ z_{f3} \end{bmatrix} := P'_3 - \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} -2.54 \\ 93.23 \\ 85.52 \end{bmatrix} \mu s \quad \begin{bmatrix} x_{f4} \\ y_{f4} \\ z_{f4} \end{bmatrix} := P'_4 - \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} -2.54 \\ 78.93 \\ 70.01 \end{bmatrix} \mu s$$

De lo anterior los desplazamientos finales máximos ubicados en la parte superior de la fundación serán:

$$\Delta x_{f.máx} := \max(|x_{f1}|, |x_{f2}|, |x_{f3}|, |x_{f4}|) = 3.89 \mu s$$

$$\Delta y_{f.máx} := \max(|y_{f1}|, |y_{f2}|, |y_{f3}|, |y_{f4}|) = 93.23 \mu s$$

$$\Delta z_{f.máx} := \max(|z_{f1}|, |z_{f2}|, |z_{f3}|, |z_{f4}|) = 85.52 \mu s$$

I.5.5 Verificación de máximas amplitudes con las admisibles según tipo de equipo

Para la velocidad $\omega = 450 \text{ rpm}$ de la máquina tipo rotativa, se obtiene una amplitud admisible de:

$$\Delta_{\text{lim}} = 95 \text{ } \mu\text{s}$$

$$\Delta x_{f_{\text{máx}}} = 3.89 \text{ } \mu\text{s} < \Delta_{\text{lim}} = 95.00 \text{ } \mu\text{s} \rightarrow \text{Verificación}_{\Delta x} = \text{"Cumple"}$$

$$\Delta y_{f_{\text{máx}}} = 93.23 \text{ } \mu\text{s} < \Delta_{\text{lim}} = 95.00 \text{ } \mu\text{s} \rightarrow \text{Verificación}_{\Delta y} = \text{"Cumple"}$$

$$\Delta z_{f_{\text{máx}}} = 85.52 \text{ } \mu\text{s} < \Delta_{\text{lim}} = 95.00 \text{ } \mu\text{s} \rightarrow \text{Verificación}_{\Delta z} = \text{"Cumple"}$$

I.6 RESUMEN DE RESULTADOS OBTENIDOS POR MÉTODOS ANALÍTICOS

Las siguientes abreviaciones harán referencia al método analítico empleado en el análisis dinámico.

MCL = Método de análisis dinámico clásico y con formulación de Lagrange.

MRM = Método de análisis dinámico por medio de la respuesta modal.

MID = Método de análisis dinámico por integración directa.

I.6.1 Frecuencias naturales de vibración en los modos respectivos

En la siguiente tabla se muestra el resumen de resultados obtenidos para los dos primeros métodos de análisis, las cuales permiten obtener de forma cerrada los periodos y frecuencias correspondientes.

Tabla I.5. Frecuencias naturales de vibración por cada modo y método respectivo

Modo	MCL		MRM	
	T [s]	f [Hz]	T [s]	f [Hz]
x	0.18953	5.28	0.18919	5.29
y	0.20682	4.84	0.20682	4.84
z	0.18060	5.54	0.18060	5.54
ϕ	0.08745	11.44	0.08745	11.44
θ	0.11018	9.08	0.11077	9.03
ψ	0.10370	9.64	0.10370	9.64

I.6.2 Amplitudes de vibración en el centro de rigidez O

En la tabla que se muestra a continuación, se presenta el resumen de resultados obtenidos para los desplazamientos tanto traslacionales como rotacionales y según el método de análisis.

Tabla I.6. Amplitudes de vibración en el punto O según el método respectivo

Dirección de Movimiento	MCL	MRM	MID
	Desplazamiento	Desplazamiento	Desplazamiento
x_o	-10.21 [μs]	-1.15 [μs]	-2.82 [μs]
y_o	-58.33 [μs]	20.17 [μs]	37.23 [μs]
z_o	58.83 [μs]	28.90 [μs]	28.91 [μs]
ϕ_o	2.08 [μrs]	-10.49 [μrs]	-13.57 [μrs]
θ_o	1.53 [μrs]	0.85 [μrs]	0.97 [μrs]
ψ_o	-1.29 [μrs]	-0.89 [μrs]	-0.89 [μrs]

I.6.3 Amplitudes máximas en las esquinas superiores de la fundación

Las amplitudes máximas de desplazamiento traslacional, obtenidas de los puntos ubicados en las esquinas superiores del sistema de fundación, se muestran en la siguiente tabla:

Tabla I.7. Amplitudes máximas de vibración según el método respectivo

Dirección de Movimiento	MCL	MRM	MID
	Desplazamiento	Desplazamiento	Desplazamiento
$\Delta x_{f_{m\acute{a}x}}$	9.37 [μs]	5.11 [μs]	3.89 [μs]
$\Delta y_{f_{m\acute{a}x}}$	76.16 [μs]	65.10 [μs]	93.23 [μs]
$\Delta z_{f_{m\acute{a}x}}$	78.52 [μs]	73.43 [μs]	85.52 [μs]

Anexo II: Cálculos previos al análisis dinámico por el método de elementos finitos

También por fines de interés académico, se han calculado los valores para los resortes y amortiguamientos (Impedancias Estáticas) totales del sistema de fundación en los 6 GDL, así como las relaciones de impedancias correspondientes a cada caso de análisis.

Tabla II.1. Impedancias del Sistema de Fundación (CASO 1 B/H=2)

Dirección	Impedancias Estáticas		Impedancias Dinámicas	
	K_i	C_i	K_i	C_i
x	2717858.69 [kN/m]	87953.27 [kN·s/m]	2137667.90 [kN/m]	55443.64 [kN·s/m]
y	2717858.69 [kN/m]	87953.27 [kN·s/m]	2137667.90 [kN/m]	55443.64 [kN·s/m]
z	2942713.83 [kN/m]	111849.05 [kN·s/m]	1851096.81 [kN/m]	58134.64 [kN·s/m]
ϕ	52047211.43 [kN·m]	298057.79 [kN·m·s]	35012899.99 [kN·m]	252119.05 [kN·m·s]
θ	150621468.88 [kN·m]	1504930.84 [kN·m·s]	86899151.51 [kN·m]	1130201.93 [kN·m·s]
ψ	94247494.34 [kN·m]	637961.62 [kN·m·s]	142701186.91 [kN·m]	1251448.80 [kN·m·s]

Tabla II.2. Relación de Impedancias del Sistema de Fundación (CASO 1 B/H=2)

Dirección	Relación de Impedancias Estáticas / Dinámicas		Relación de Impedancias Dinámicas / Estáticas	
	K_{Stc} / K_{Dyn}	C_{Stc} / C_{Dyn}	K_{Dyn} / K_{Stc}	C_{Dyn} / C_{Stc}
x	1.27	1.59	0.79	0.63
y	1.27	1.59	0.79	0.63
z	1.59	1.92	0.63	0.52
ϕ	1.49	1.18	0.67	0.85
θ	1.73	1.33	0.58	0.75
ψ	0.66	0.51	1.51	1.96

Tabla II.3. Impedancias del Sistema de Fundación (CASO 2 B/H=3)

Dirección	Impedancias Estáticas		Impedancias Dinámicas	
	K_i	C_i	K_i	C_i
x	2387796.84 [kN/m]	70159.70 [kN·s/m]	1958058.32 [kN/m]	41884.93 [kN·s/m]
y	2387796.84 [kN/m]	70159.70 [kN·s/m]	1958058.32 [kN/m]	41884.93 [kN·s/m]
z	2764555.45 [kN/m]	97771.74 [kN·s/m]	1729516.46 [kN/m]	49555.97 [kN·s/m]
ϕ	44205316.91 [kN·m]	283676.98 [kN·m·s]	30783175.17 [kN·m]	200286.49 [kN·m·s]
θ	135471240.94 [kN·m]	1472290.84 [kN·m·s]	77981527.82 [kN·m]	963901.64 [kN·m·s]
ψ	94247494.34 [kN·m]	643763.90 [kN·m·s]	112856782.48 [kN·m]	898516.75 [kN·m·s]

Tabla II.4. Relación de Impedancias del Sistema de Fundación (CASO 2 B/H=3)

Dirección	Relación de Impedancias Estáticas / Dinámicas		Relación de Impedancias Dinámicas / Estáticas	
	K_{Stc} / K_{Dyn}	C_{Stc} / C_{Dyn}	K_{Dyn} / K_{Stc}	C_{Dyn} / C_{Stc}
x	1.22	1.68	0.82	0.60
y	1.22	1.68	0.82	0.60
z	1.60	1.97	0.63	0.51
ϕ	1.44	1.42	0.70	0.71
θ	1.74	1.53	0.58	0.65
ψ	0.84	0.72	1.20	1.40

Tabla II.5. Impedancias del Sistema de Fundación (CASO 3 B/H=4)

Dirección	Impedancias Estáticas		Impedancias Dinámicas	
	K_i	C_i	K_i	C_i
x	2222765.92 [kN/m]	60668.12 [kN·s/m]	1868253.54 [kN/m]	35105.57 [kN·s/m]
y	2222765.92 [kN/m]	60668.12 [kN·s/m]	1868253.54 [kN/m]	35105.57 [kN·s/m]
z	2675476.25 [kN/m]	90501.29 [kN·s/m]	1668726.28 [kN/m]	45266.63 [kN·s/m]
ϕ	40854476.49 [kN·m]	283627.05 [kN·m·s]	28668312.76 [kN·m]	174370.22 [kN·m·s]
θ	128466233.81 [kN·m]	1467396.78 [kN·m·s]	73522715.98 [kN·m]	880751.50 [kN·m·s]
ψ	94247494.34 [kN·m]	646360.87 [kN·m·s]	97934580.26 [kN·m]	722050.73 [kN·m·s]

Tabla II.6. Relación de Impedancias del Sistema de Fundación (CASO 3 B/H=4)

Dirección	Relación de Impedancias Estáticas / Dinámicas		Relación de Impedancias Dinámicas / Estáticas	
	K_{Stc} / K_{Dyn}	C_{Stc} / C_{Dyn}	K_{Dyn} / K_{Stc}	C_{Dyn} / C_{Stc}
x	1.19	1.73	0.84	0.58
y	1.19	1.73	0.84	0.58
z	1.60	2.00	0.62	0.50
ϕ	1.43	1.63	0.70	0.61
θ	1.75	1.67	0.57	0.60
ψ	0.96	0.90	1.04	1.12

De la comparación entre las Impedancias Estáticas y Dinámicas hechos hasta el Caso 3, pueden apreciarse que los resortes y amortiguamientos equivalentes del suelo en el sistema de fundación y para el modelo de Richart et al. (1970) y Whitman (1972), estos poseen mayores valores a excepción de la rotación torsional en comparación con el modelo de Veletsos & Verbič (1973).

Tabla II.7. Impedancias del Sistema de Fundación (CASO 4 B/H=6)

Dirección	Impedancias Estáticas		Impedancias Dinámicas	
	K_i	C_i	K_i	C_i
x	2057734.99 [kN/m]	50700.49 [kN·s/m]	1778448.75 [kN/m]	28326.21 [kN·s/m]
y	2057734.99 [kN/m]	50700.49 [kN·s/m]	1778448.75 [kN/m]	28326.21 [kN·s/m]
z	2586397.06 [kN/m]	83061.09 [kN·s/m]	1607936.11 [kN/m]	40977.29 [kN·s/m]
ϕ	37731678.80 [kN·m]	286133.96 [kN·m·s]	26553450.35 [kN·m]	148453.94 [kN·m·s]
θ	121689269.41 [kN·m]	1466872.83 [kN·m·s]	69063904.13 [kN·m]	797601.35 [kN·m·s]
ψ	94247494.34 [kN·m]	647589.51 [kN·m·s]	83012378.04 [kN·m]	545584.71 [kN·m·s]

Tabla II.8. Relación de Impedancias del Sistema de Fundación (CASO 4 B/H=6)

Dirección	Relación de Impedancias Estáticas / Dinámicas		Relación de Impedancias Dinámicas / Estáticas	
	K_{Stc} / K_{Dyn}	C_{Stc} / C_{Dyn}	K_{Dyn} / K_{Stc}	C_{Dyn} / C_{Stc}
x	1.16	1.79	0.86	0.56
y	1.16	1.79	0.86	0.56
z	1.61	2.03	0.62	0.49
ϕ	1.42	1.93	0.70	0.52
θ	1.76	1.84	0.57	0.54
ψ	1.14	1.19	0.88	0.84

Para el ultimo Caso 4, se pueden observar que los resortes y amortiguamientos equivalentes del suelo en el sistema de fundación y para el modelo de Richart et al. (1970) y Whitman (1972), son mayores para todas las direcciones o modos de vibración, en comparación con el modelo de Veletsos & Verbić (1973).

II.2 FUNCIONES ADIMENSIONALES DE LAS FUERZAS DE EXCITACIÓN

II.2.1 Tamaño del paso de tiempo, número de pasos y ciclos

Frecuencia de la máquina considerada para el análisis: $\omega = 450 \text{ rpm}$

Primeramente se determina el periodo de la velocidad de operación de la máquina, es decir:

$$T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 0.133333 \text{ s}$$

Para hallar el tamaño del paso de tiempo, se conoce lo siguiente:

Número pasos por ciclo: $N_{pc} := 80$

Por lo que el tamaño del paso de tiempo será: $\Delta t := \frac{T}{N_{pc}} = 0.001667 \text{ s}$

Anexo II: Cálculos previos al análisis dinámico por el método de elementos finitos

El número de pasos de tiempo se define como: $N_{pasos} = N_{pc} \cdot N_c$

Siendo N_c , el número de ciclos de las funciones adimensionales.

Despejando la variable desconocida anterior (N_c), para el número de pasos considerado en el método de integración directa, obtenemos:

$$N_{pasos} = 1200 \quad \rightarrow \quad N_c := \frac{N_{pasos}}{N_{pc}} = 15$$

II.2.2 Pasos de tiempo y funciones adimensionales de las fuerzas de excitación

$$i = 0, 1 \dots N_{pasos} \quad t_i = i \cdot \Delta t \quad P \mid P_0(t) = \sin(\omega \cdot t)$$

Tabla II.9. Valores de funciones adimensionales vs. pasos de tiempo

Nro de Paso	Pasos de tiempo [s]	P / P ₀
0	0.0000	0.0000
1	0.0017	0.0785
2	0.0033	0.1564
3	0.0050	0.2334
4	0.0067	0.3090
5	0.0083	0.3827
6	0.0100	0.4540
7	0.0117	0.5225
8	0.0133	0.5878
9	0.0150	0.6494
10	0.0167	0.7071
11	0.0183	0.7604
...	...	...
1189	1.9817	-0.7604
1190	1.9833	-0.7071
1191	1.9850	-0.6494
1192	1.9867	-0.5878
1193	1.9883	-0.5225
1194	1.9900	-0.4540
1195	1.9917	-0.3827
1196	1.9933	-0.3090
1197	1.9950	-0.2334
1198	1.9967	-0.1564
1199	1.9983	-0.0785
1200	2.0000	0.0000